



İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yapı Statik II Dersi

Doç. Dr. Müslüm Murat MARAŞ

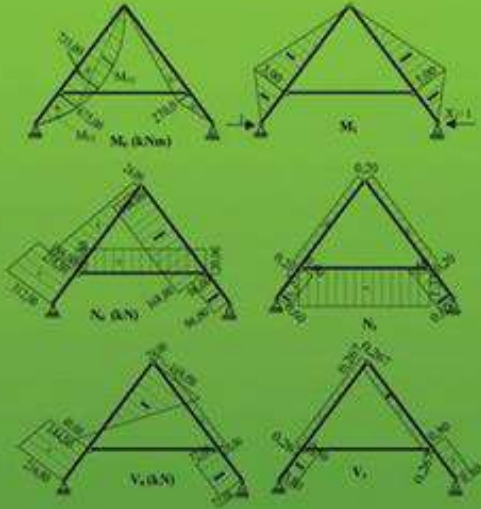
Malatya - 2026

Kaynaklar

BİRSEN YAYINEVİ

YAPI STATİĞİ II

YAPI SİSTEMLERİNDE YER DEĞİŞTİRMELERİN
VE
HİPERSTATİK SİSTEMLERİN
HESAP YÖNTEMLERİ



Prof. İbrahim EKİZ

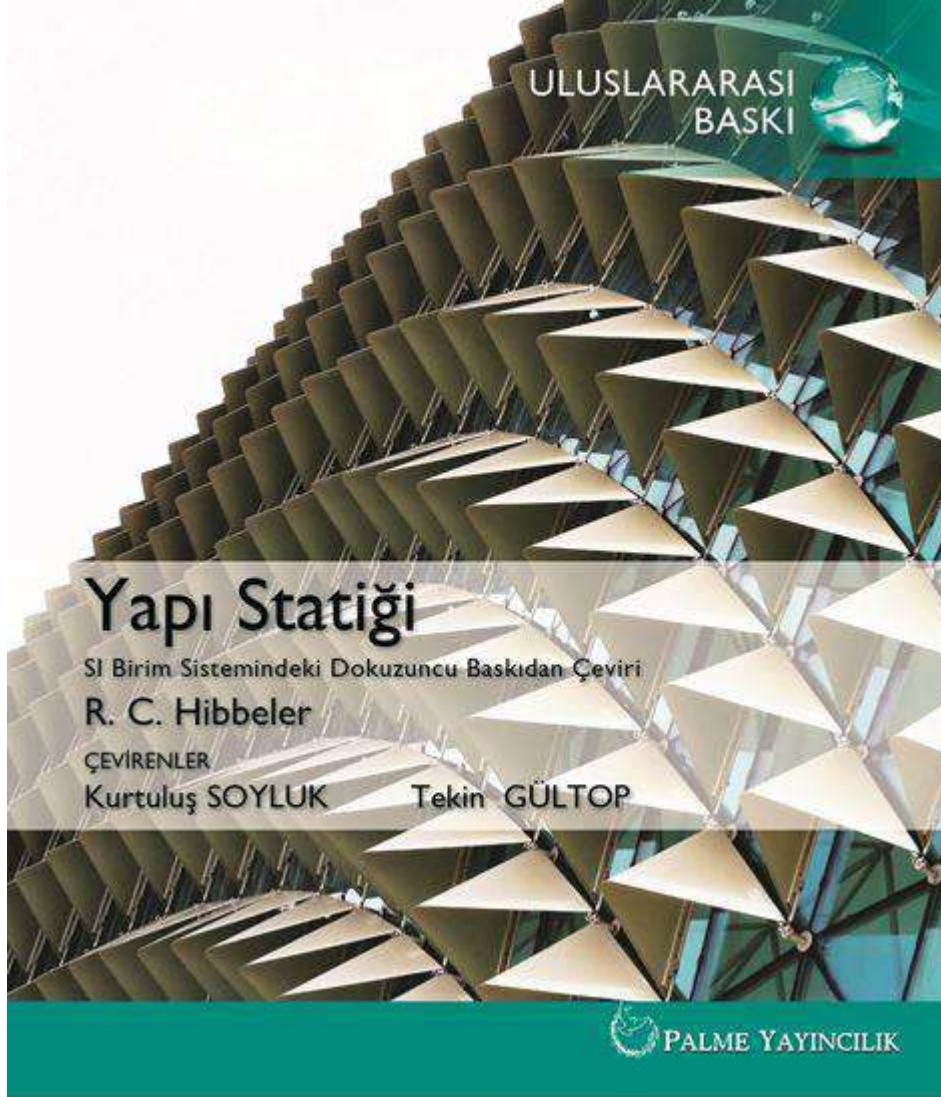
GÜNCELLESTİRİLMİŞ
3.
BASKI

YAPI STATİĞİ II

Yapı Sistemlerinde Yer
Değıştirmelerin Ve Hiperstatik
Sistemlerin Hesap Yöntemleri

Prof. Dr. İbrahim EKİZ

Kaynaklar



YAPI STATİĞİ II

- **Yapı Sistemlerinde Yer Değiştirmelerin**
 - a) **Virtüel İş Yöntemi**

- **Hiperstatik Sistemlerin Hesap Yöntemleri**
 - a) **Hiperstatik dereceler**
 - b) **Serbestlik dereceleri**

- 1) **Kuvvet Yöntemi**
- 2) **Açı Yöntemi**
- 3) **Cross-Moment Dağıtım Yöntemi**



1.BÖLÜM

1 İZOSTATİK SİSTEMLERDE ŞEKİL VE YER DEĞİŞTİRMELER

1.1 ÇUBUKLARDA ŞEKİL DEĞİŞTİRMELER

1.1.1 Giriş

1.1.1.1 Şekil Değiştirme

Bir cismin çeşitli noktalarının birbirlerine göre rölatif durumunun değişmesine **şekil değiştirme** denir. Şekil değiştirme deyimi mukavemette çok genel olarak kullanılır. Cismin geometrisi değişmeden kendisine benzer olarak sadece kenarlarının değişmesi ve dolayısıyla hacminin değişmesi, bir şekil değiştirme olduğu gibi kenarları bozulmadan yalnız açılarının değişmesi de bir tip şekil değiştirmedir. Genel olarak bir elemanın şeklindeki değişime şekil değiştirme veya deformasyon denir. Mukavemette

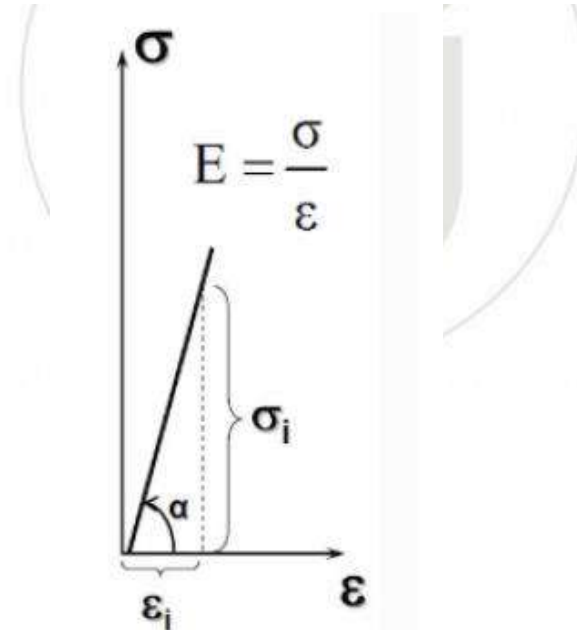
$$\text{Birim şekil değiştirme} = \frac{\text{Gerilme}}{\text{Modül}}$$

dür. Bilindiği gibi elastisite modülü E ve kayma modülü G'dir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Elastisite Modülü; malzemeye uygulanan gerilmenin, uygulanan gerilmeden dolayı meydana gelen birim şekil değişimine oranıyla elde edilir. Bir malzemenin elastisite modülü ne kadar yüksek ise plastik yani kalıcı şekil değişimine uğramadan dayanabileceği kuvvet o kadar yüksek veya elastik uzama oranı o kadar düşüktür. ($E = \sigma / \epsilon$)

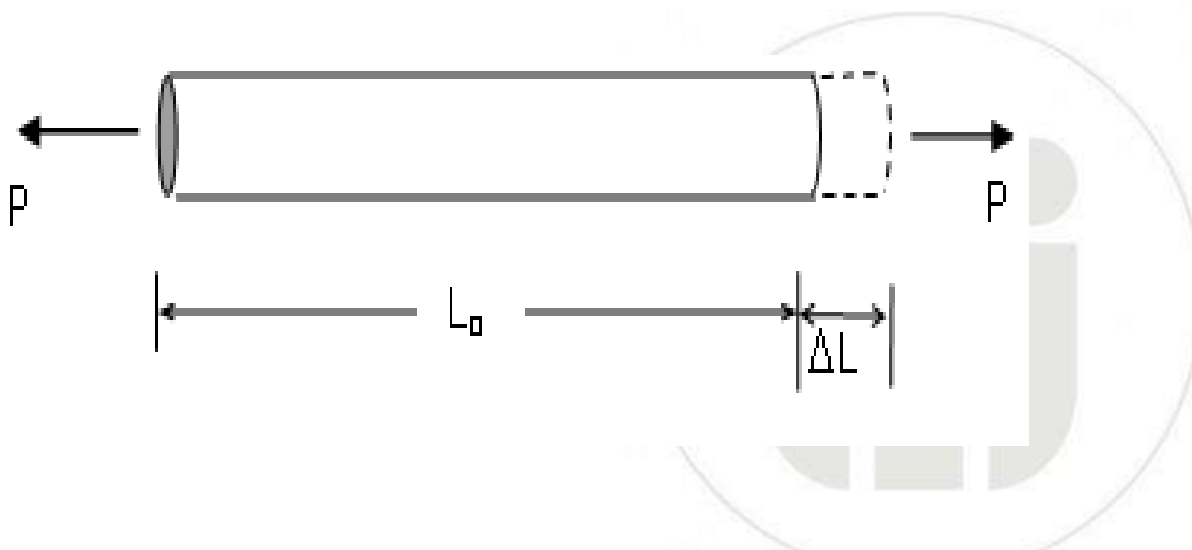
İşte elastik bölgede gerilme ve birim uzamanın doğru orantılı olduğu ve $\sigma = E \times \epsilon$ bağıntısıyla açıklanan bu kanuna **Hooke Kanunu** denir. Bağıntıda yer alan **E** sabiti ise “**Elastisite Modülü**” veya “**Young Modülü**” olarak adlandırılır. Hooke’a göre, **kuvvet ne kadarsa uzama da o kadardır**.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Gerilme (σ) = P/A (P =Kuvvet, A =Kesit Alanı)

Birim Şekil Değiştirme ($\epsilon = \Delta L / L_0$) ise; örnek verecek olursak, meydana gelen uzama miktarının, malzemenin ilk uzunluğuna oranıdır. (100 cm'lik bir malzeme, 1 cm. uzuyorsa $1/100=0,01$ 'dir.) (ΔL = Şekil Değiştirme Miktarı, L_0 = İlk Uzunluk)



$$\sigma = P / F_o$$

$$\epsilon = \Delta L / L_o$$

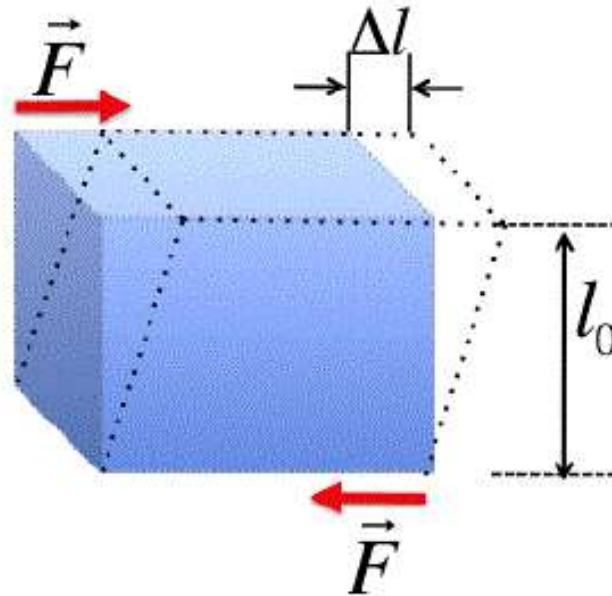
Elastisite modülü; malzemenin rijitliğini gösteren bir değerdir. **Elastisite modülü ne kadar büyükse** malzeme o kadar rijittir ve elastik birim şekil değiştirmesi ise o kadar küçüktür.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bir malzemenin (elemanın) kesitine paralel şekilde uygulanan kuvvete veya kuvvet bileşenine **kesme kuvveti**; uygulanan kesme kuvvetinin birim alana etkisine ise **kayma gerilmesi** (**kesme gerilmesi** de denir) denir. Kuvvet " F " ile Kayma Gerilmesi " τ " ile ifade edilir. Formülü $\rightarrow \tau = F/A$

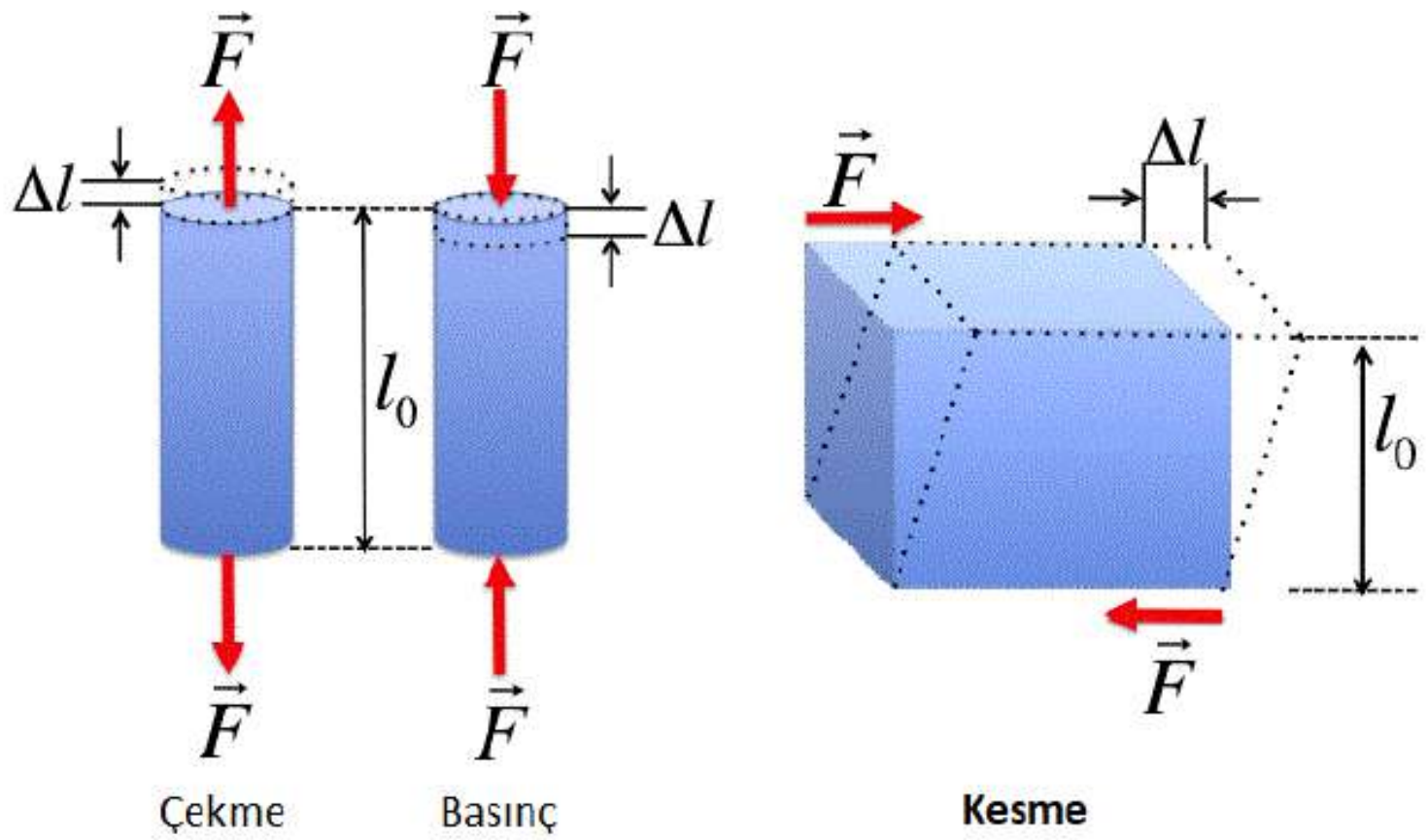
Kesme kuvveti, makaslama kuvveti veya teğetsel kuvvet olarak; kayma gerilmesi ise kesme gerilmesi veya teğetsel gerilme gibi çeşitli ifadeler şeklinde karşınıza çıkabilir.

Bir elemana **kesme kuvveti** uygulandığında, cismin iki zıt yüzeyinin, birbirlerine paralel ve zıt yönde kaymalarını sağlar; elemanda **açısal bir şekil değişimi** gözlenir.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bir elemanın yüzeyine, **dik** olarak etki eden çekme veya basınç kuvvetlerine **normal kuvvet**(asal kuvvet), oluşturdukları gerilmeye ise **çekme gerilmesi** veya **basınç gerilmesi** adı verilir. Normal kuvvete dik yani yüzeye paralel olarak uygulanan kuvvetlere ise bahsettiğimiz gibi **kesme kuvveti**; bu kuvvetlerin oluşturduğu gerilmeye ise **kayma gerilmesi** adı verilir.



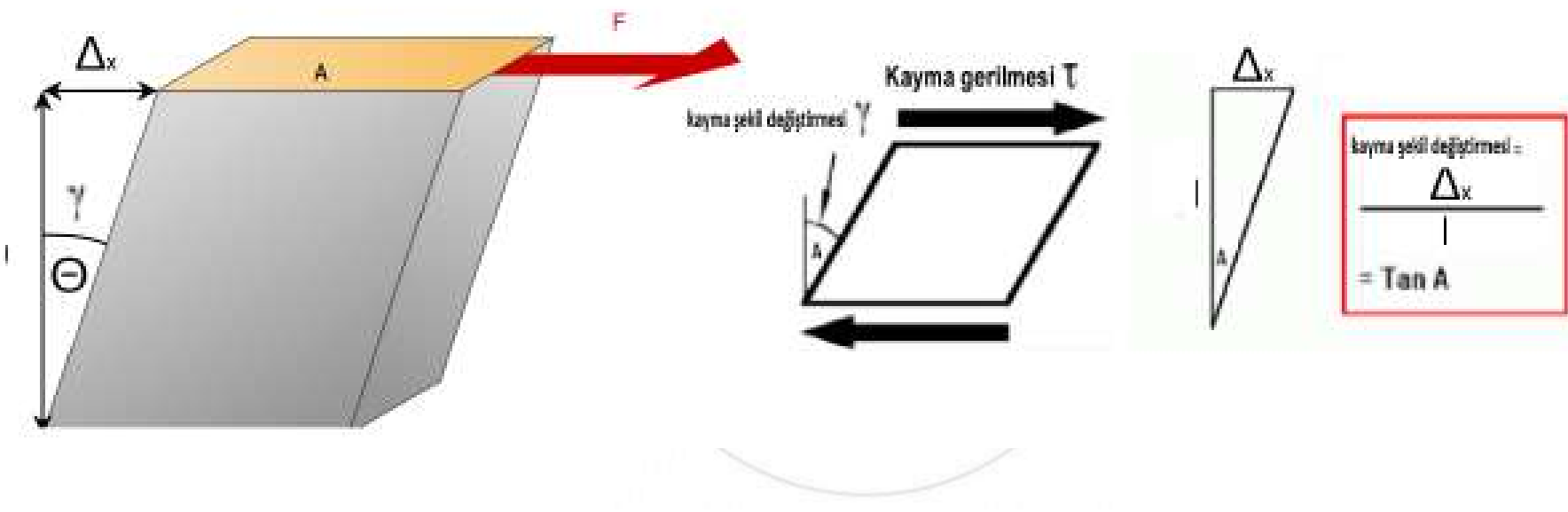
Kuvvet Çeşitleri, Gerilmeler ve Meydana Gelen Şekil Değişimleri

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Uygulanan kuvvet elemanın yüzeyine(kesitine) **dik** ise; **kesme kuvveti** ve dolayısıyla **kayma gerilmesi sıfırdır**.

Uygulanan kuvvet elemanın yüzeyine **paralel** ise; **asal gerilme sıfırdır**.

Genel mühendislik malzemelerinin elastik deformasyonunda kayma gerilmesi kayma birim uzaması **doğru orantılıdır**.



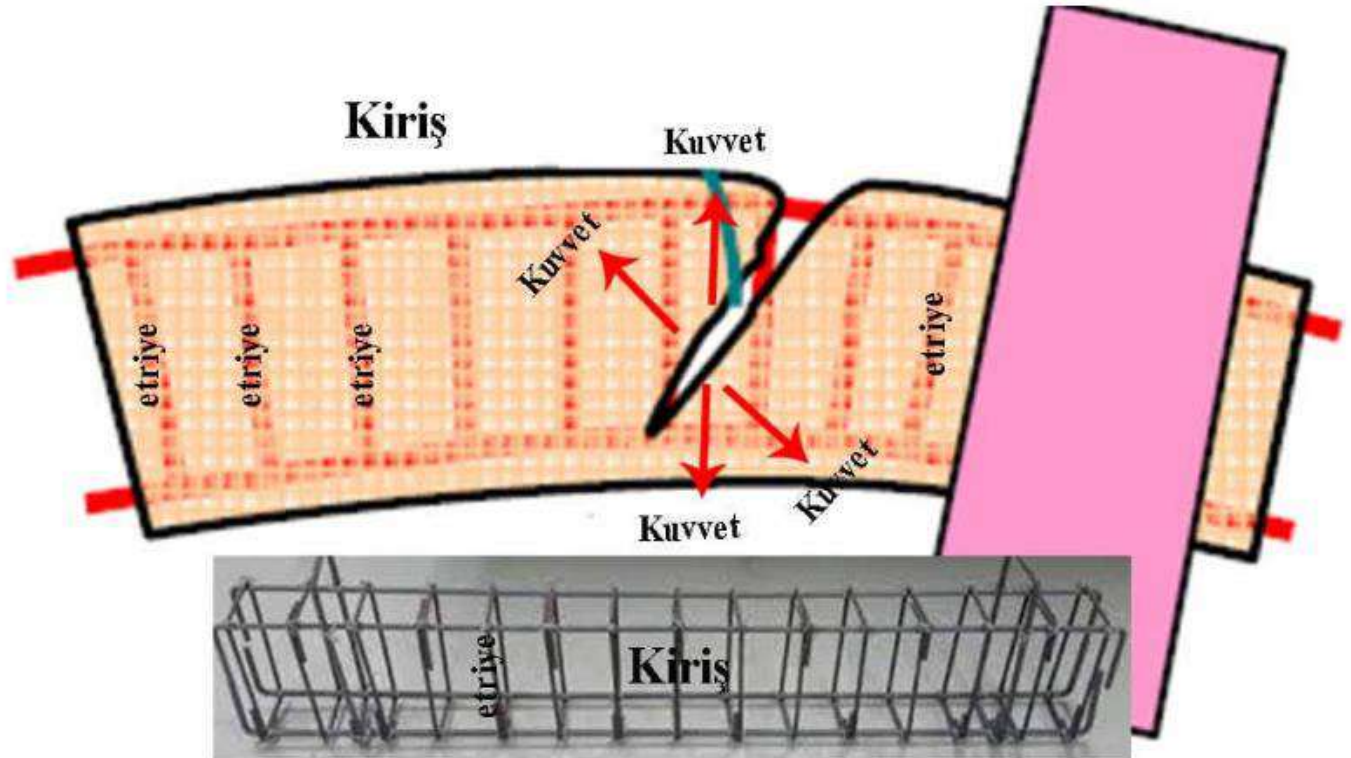
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

O yüzden bir yapı elemanının veya bir malzemenin çekme ve basınca karşı dirençli olması kadar kesme kuvvetine karşı da dirençli olması gerekebilir. Kesme kuvveti; inşaat mühendisliğinde bir yapı tasarlarken sık sık karşılaşılan ve dikkate alınan bir kuvvettir. Bu nedenle kirişlerin, kiriş – kolon birleşimlerinin, kolonların, bulonların vb. malzeme ve yapı elemanlarının kesme hesaplarını, testlerini vs. yapmak durumunda kalırız. Kesme kuvvetine; deprem sırasında oluşan yatay kuvvetler, rüzgarın oluşturduğu yatay kuvvetler, zemin itkisi gibi örnekler de verebiliriz. Kesme kuvveti; yeterli hesap, uygulama yapılmadığı sürece büyük ve ani hasarlar verebilir. Bu nedenle kesme güvenliğini sağlamamız gerekmektedir. Etriyeler, kesme kuvvetine dolayısıyla kayma gerilmesine karşı yapılan hesaplar sonucu uygulanan bir uygulamadır ve kayma gerilmesine karşı kullanılır. Bu nedenle etriyelere deprem donatısı veya kayma donatısı gibi isimler de verilmiştir.



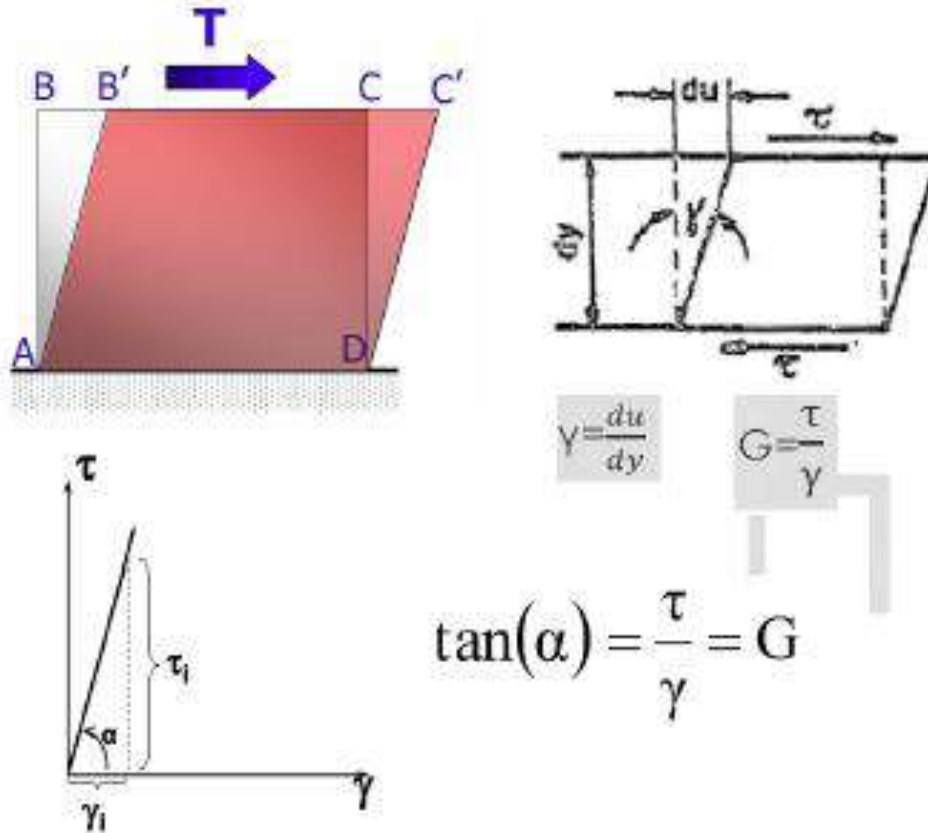
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

bir insan bacakları sayesinde kendi ağırlığının 6-7 katını taşıyabilmektedir ancak bu ağırlığın uyguladığı kuvvetten daha az bir kuvvet ile birisinin bacağına bir tekme attığınızda rahatça devirmeniz veya kemiklerini kırmanız bile mümkündür. İşte bu kadar güçlü olan bacaklarımızı da bir yapı olarak hayal edersek; bir yapı da, deprem esnasında meydana gelen kesme kuvvetinden dolayı bir tekme yemiş gibi olur. Yapının altındaki zemin aynı şekilde kesme kuvvetine maruz kalır ve kayma gerilmesi oluşur. Bu nedenle yapımızda ve zeminimizde **kesme kuvvetlerine** karşı gerekli çalışma ve hesaplamaları yapmak zorundayız.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Elastik bölgede; bir malzemenin maruz kaldığı **kayma gerilmesinin**, bu gerilmeden dolayı uğradığı **birim şekil değiştirmeye oranı** ile **kayma modülü** (rijitlik veya rijidite modülü) elde edilir. “**G**” ile ifade edilir.



G : Kayma modülü,
 τ : kayma gerilmesi,
 γ : Kayma gerilmesi birim deformasyonu

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bir malzemenin kayma modülü yani rijitlik modülü ne kadar yüksek ise, o malzemenin deformasyona uğraması, o kadar zordur yani daha rijittir ve ilk halini korumaya daha yatkındır. Deformasyona karşı fazla direnç gösterir. Sünek bir davranış sergilemez ve ani kırılmalar meydana gelebilir. Bizler yapıları tasarlarken rijit olmasını tabi ki isteriz ancak belirli bir sünekliğe sahip olması özellikle deprem bölgelerinde çok dikkat edilen bir durumdur.



Kayma modülü "0" ise, bu demektir ki; bu malzeme küçük bir kesme kuvveti ile şekil değiştirir ve kuvvet yönüne doğru çok rahat bir şekilde kaymaya başlar. İşte bu akışkanlıktır. Yani akışkanların(sıvıların) kayma modülü "0"(sıfır)' dır.

Yani katılar şekillerini korumaya çalışır iken, sıvılar ise şekillerini koruyamıyor. Demek ki, sıvılar ile katılar arasındaki farklardan bir tanesi; sıvıların **kayma modülü 0** iken katıların **kayma modülü** ise 0'dan farklıdır.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bir düzlem çubukta genel olarak

- 1- Eksenel şekil değiştirme (eksenel uzama ve kısalma)
- 2- Eğilme şekil değiştirmesi (eğilme dönmesi)
- 3- Kayma şekil değiştirmesi (kayma)

olmak üzere üç tip şekil değiştirme meydana gelir.

Genel olarak bir cismin şekil değiştirmesine sebep olan etkenler şunlardır:

- 1- İç kuvvetler (kesit tesirleri)
- 2- Sıcaklık değişimleri
- 3- Malzemelerin viskoelastik özellikleri (sünme, rötre)
- 4- Elastik mesnetler
- 5- Yapım hataları
- 6- Mesnet şartlarındaki değişimler (mesnet hareketleri)

1.1.1.2 Kabuller

Çubukların şekil değiştirmelerinin analizinde daha önce izostatik sistemlerin hesabında belirlenmiş olan kabullere aşağıda belirlenen kabulleri de eklemek gerekir.

- 1-Çubuğun enkesiti sabit ve yükleme düzlemine göre simetriktir.
- 2-Çubuğun enkesit boyutları uzunluğuna göre çok küçüktür.
- 3-Başlangıçtaki düzlem kesit şekil değiştirmeden sonra da düzlem kalır.
- 4-Çekme ve basınçtaki elastisite modülü aynı değerdedir.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.5 Yapı Statiğinde Yapılan Varsayımlar

1.5.1 Malzemenin davranışı

Yapılarda kullanılan malzemeler lineer elastik, homojen ve izotrop varsayılır. Çoğu yapı malzemesi, sadece belirli bir gerilme limiti içerisinde Hooke Kanununa uygun olarak elastik davranır. Genel durumda servis yükleri altındaki hesap gerilmeleri yeteri kadar düşük olduğundan elastik davranış hakimdir. Bu bakımdan lineer elastik davranış varsayımı doğru sayılır.

1.5.2 İncelenen sistemin şekli

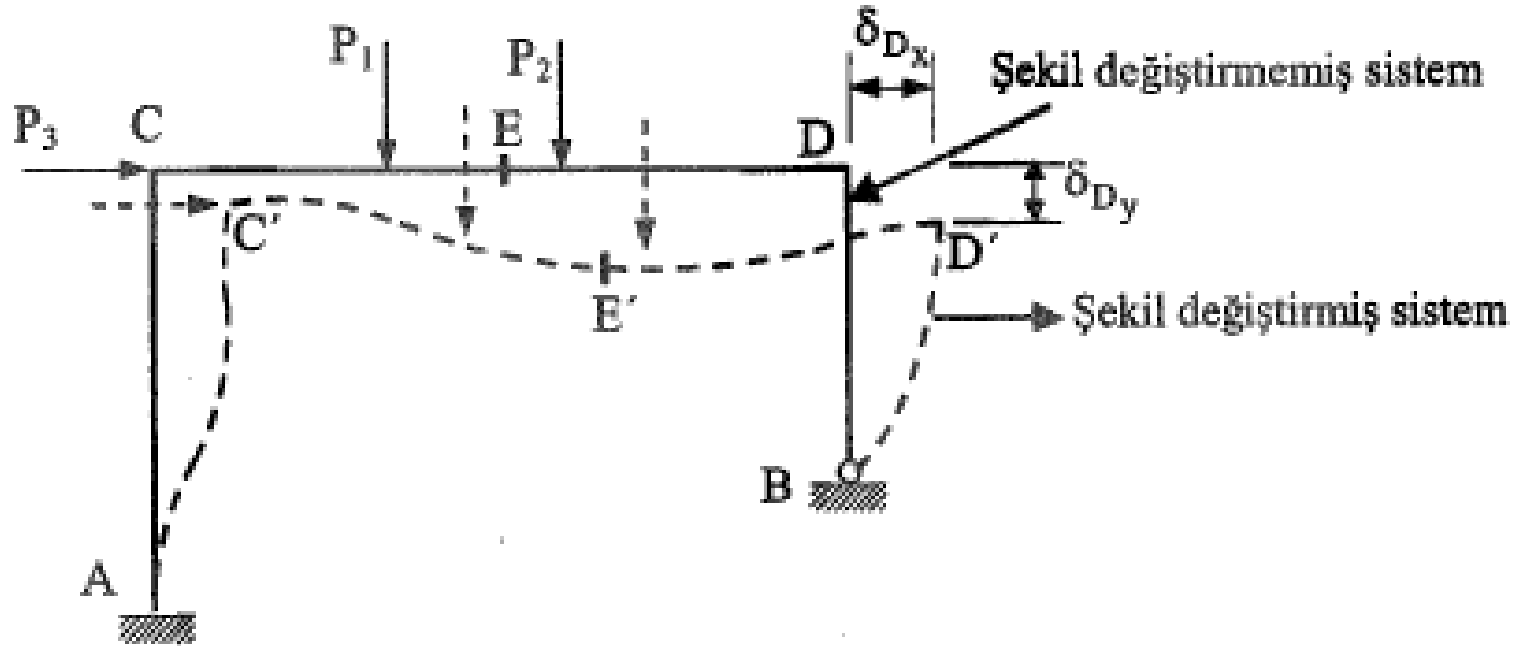
Yapı statığında incelenen sistemler dış yüklerin şiddeti ve yerine bağlı değildir. Diğer bir anlatımla yüklerin yeri ve/veya şiddeti değiştikçe sistemin statik şeması değişiyorsa bu tür sistemler yapı statığı konuları içerisinde incelenmez.

1.5.3 Sistemin şekil değiştirmeden sonraki durumu

Yapı statığında incelenecek sistemlerde Bernoulli varsayımı geçerlidir. Diğer bir anlatımla, düzlem kesitler şekil değiştirmeden sonra da düzlem kalırlar ve bu düzlemler eğilmiş çubuk eksenine diktir. Ayrıca çubuk eksenine dik olan gerilmelerin yok sayılacak kadar küçük olduğu var sayılır.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.5.4 Sistemlerde meydana gelen yer değiştirmeler



Şekil 1.53 Sistemin yüklenmeden önceki ve yüklendikten sonraki durumu

Sisteme etkiyen yüklerden meydana gelen yer değiştirmelerin, taşıyıcı sistemin elemanlarının uzunlukları yanında yok sayılabilecek kadar küçük olduğu, sistemin ilk geometrisini koruduğu ve buna dayalı olarakda şekil değiştirmemiş sistem üzerinde denge şartlarının yazılabileceği varsayılır. Bu nedenle denge denklemleri şekil değiştirmemiş sistem üzerinde yazılabilir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.5.5 Süperpozisyon kuralı

Göz önüne alınan sistemlerde malzemenin elastik olması ve birinci mertebe teorisinin geçerli olması varsayımı sonucu süperpozisyon kuralı geçerlidir. Genelde yüklerin aşama aşama uygulandığı varsayılır. Süperpozisyon kuralı gereğince yüklerin sisteme ayrı ayrı yüklenmesi durumunda meydana gelecek statik büyüklükler (kesit tesirleri, mesnet tepkileri, yer değiştirmeler) ile yüklerin tümünün aynı anda yüklenmesi durumunda meydana gelecek statik büyüklükler birbirine eşittir.

1.5.6 Sistemin Kararlılığı

Yapı statığında göz önüne alınan sistemlerin statik denge durumunda, diğer bir deyişle kararlı denge durumunda olduğu varsayılır. Kararsız, oynak (labil) sistemler yapı statığında incelenemez.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

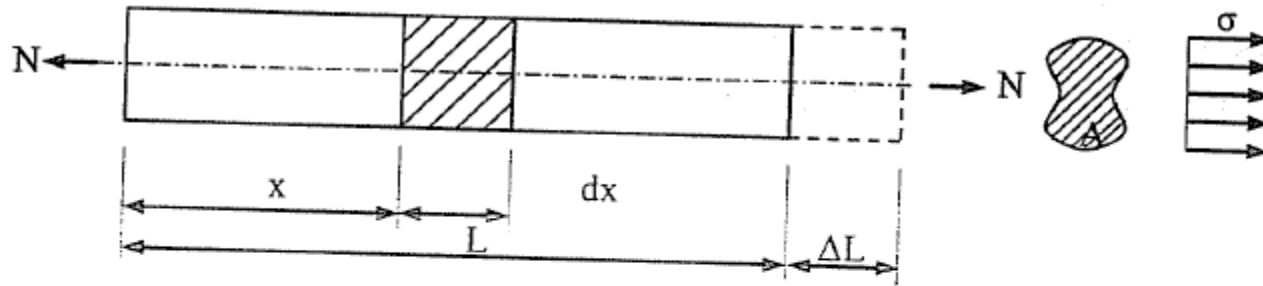
1.1.2 İç Kuvvetlerin Oluşturduğu Şekil Değiştirmeler

İç kuvvetlerin etkisi ile oluşan şekil değiştirmeler elastik şekil değiştirmelerdir.

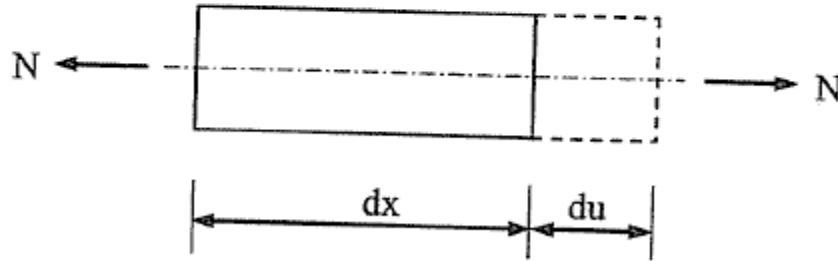
1.1.2.1 Normal kuvvet etkisinden oluşan şekil değiştirme (Eksenel şekil değiştirme)

N normal kuvveti etkisindeki bir çubuk kesitinde düzgün yayılı ve kesite dik gerilme meydana gelir. Şekil 1.1.1'de gösterilen N normal kuvvet etkisinde ve L uzunluğundaki bir prizmatik düzlem çubuğu göz önüne alalım. Bu çubukta dx elemanını üzerine etkileyen kuvvet ile ayrı bir cisim olarak gösterirsek (Şekil 1.1.2) bu dx uzunluklu çubukta N normal kuvvetinden dolayı bu kuvvet doğrultusunda da şekil değiştirmesi meydana gelir. Şekil değiştirme bu kuvvetin çekme olması durumunda uzama, basınç olması durumunda kısalma biçimindedir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



Şekil 1.1.1 Çubukta aksenal şekil değiştirme



Şekil 1.1.2 Diferansiyel elemanda aksenal şekil değiştirme

Tarif gereği birim şekil değiştirme

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (1.1.1)$$

olur. Diğer taraftan Hooke kanununa göre birim şekil değiştirme

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (1.1.2)$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bilindiği gibi normal gerilme

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (1.1.3)$$

dır. Burada A çubuğun enkesit alanı, σ kesite etkiyen normal gerilme, ε birim şekil değiştirme ve E elastisite modülüdür. (1.1.2) eşitliğinde σ yerine (1.1.3) eşitliğindeki değeri konularak

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \quad (1.1.4)$$

elde edilir. (1.1.1) ve (1.1.4) eşitlikleri, birbirine eşitlenerek

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{N}{EA} \quad (1.1.5)$$

elde edilir. dx uzunluğundaki çubuğun uzaması

$$du = \varepsilon \cdot dx = \frac{N}{EA} dx \quad (1.1.6)$$

olarak bulunur. Burada EA değerine çubuğun uzama rijitliği denir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

L uzunluğundaki çubukta meydana gelen toplam ΔL şekil değiştirmesi (uzama veya kısalması)

$$\Delta L = \int_0^L du = \int_0^L \frac{N}{EA} dx \quad (1.1.7)$$

şeklinde ve N, A ve E'nin çubuk boyunca sabit olması durumunda

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} \quad (1.1.8)$$

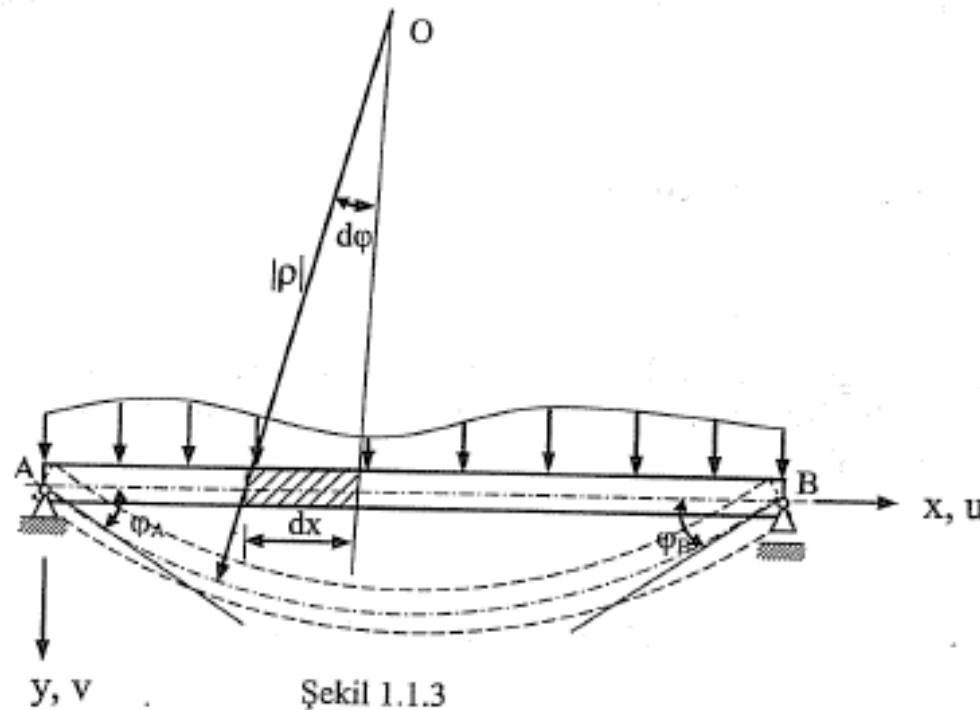
olarak bulunur.



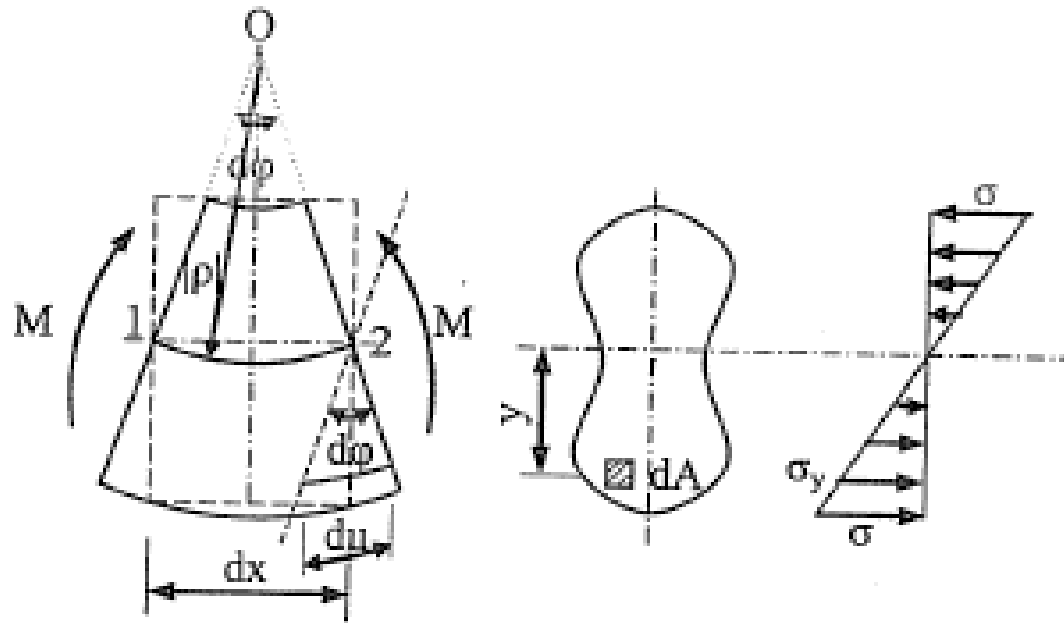
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.1.2.2 Eğilme Momentinden Oluşan Şekil Değiştirme (Eğilme Şekil Değiştirmesi)

Şekil 1.1.3'de görüldüğü gibi eksenini boyunca eğilme momenti etkisi altında bulunan bir düzlem çubukta dx uzunluğundaki bir elemanın iki yüzü başlangıçtaki konumlarına göre iki yüzü arasında $d\phi$ açısı meydana gelecek biçimde şekil değiştirirler. Buna eğilme şekil değiştirmesi denir.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



Şekil 1.1.4 Eğilme şekil değiştirmesi

Burada $d\phi \ll 1$ olduğundan

$$\operatorname{tg} d\phi \cong d\phi \text{ ve } \sin d\phi \cong d\phi$$

(1.1.9)

alınabilir. Bernoulli hipotezi geçerli olduğundan $\phi_1 2 = \phi_2 1 \cong 90^\circ$ 'dir.

Buradan

$$dx = |\rho| d\phi$$

(1.1.10)

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

ve

$$du = y.d\varphi \quad (1.1.11)$$

dir. Burada ρ eğrilik yarıçapı ve y çubuk enkesiti üzerindeki herhangi bir noktanın tarafsız eksene uzaklığıdır. Birim şekil değiştirme

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (1.1.12)$$

olduğundan, burada dx ve du 'nun (1.1.10) ve (1.1.11)'deki değerleri yerlerine konularak

$$\varepsilon = \frac{y.d\varphi}{|\rho|d\varphi} = \frac{y}{|\rho|} \quad (1.1.13)$$

ve çubuğun birim boydaki açısal değişimi (eğrilik)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{|\rho|} \quad (1.1.14)$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

dir. Hooke kanununa göre

$$\sigma = \varepsilon.E \quad (1.1.15)$$

ve kesitteki denge şartından eğilme momenti

$$M = \int_A \sigma_y . y . dA \quad (1.1.16)$$

yazılır. σ yerine (1.1.15) eşitliğindeki değeri yerine konularak

$$M = \int_A \varepsilon.E.y.dA \quad (1.1.17)$$

bulunur. Burada ε yerine de (1.1.13) eşitliğindeki değeri yerine konularak

$$M = \int_A E \frac{1}{|\rho|} y^2 . dA \quad (1.1.18)$$

elde edilir. Bu eşitliklerde bilindiği gibi

$$\int_A y^2 dA = I \quad (1.1.19)$$

kesitin atalet momentidir. Bu değer (1.1.18) eşitliğinde yerine konularak

$$M = \frac{EI}{|\rho|} \quad (1.1.20)$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

$$\frac{1}{|\rho|} = \frac{M}{EI} \quad (1.1.21)$$

elde edilir. Birim boydaki dönme açısı (eğrilik)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{|\rho|} = \frac{M}{EI} \quad (1.1.22)$$

bulunur. dx uzunluğundaki çubuğun dönme açısı

$$d\varphi = \omega \cdot dx = \frac{M}{EI} dx \quad \text{veya} \quad d\varphi = \frac{dx}{|\rho|} \quad (1.1.23 \text{ ve } 24)$$

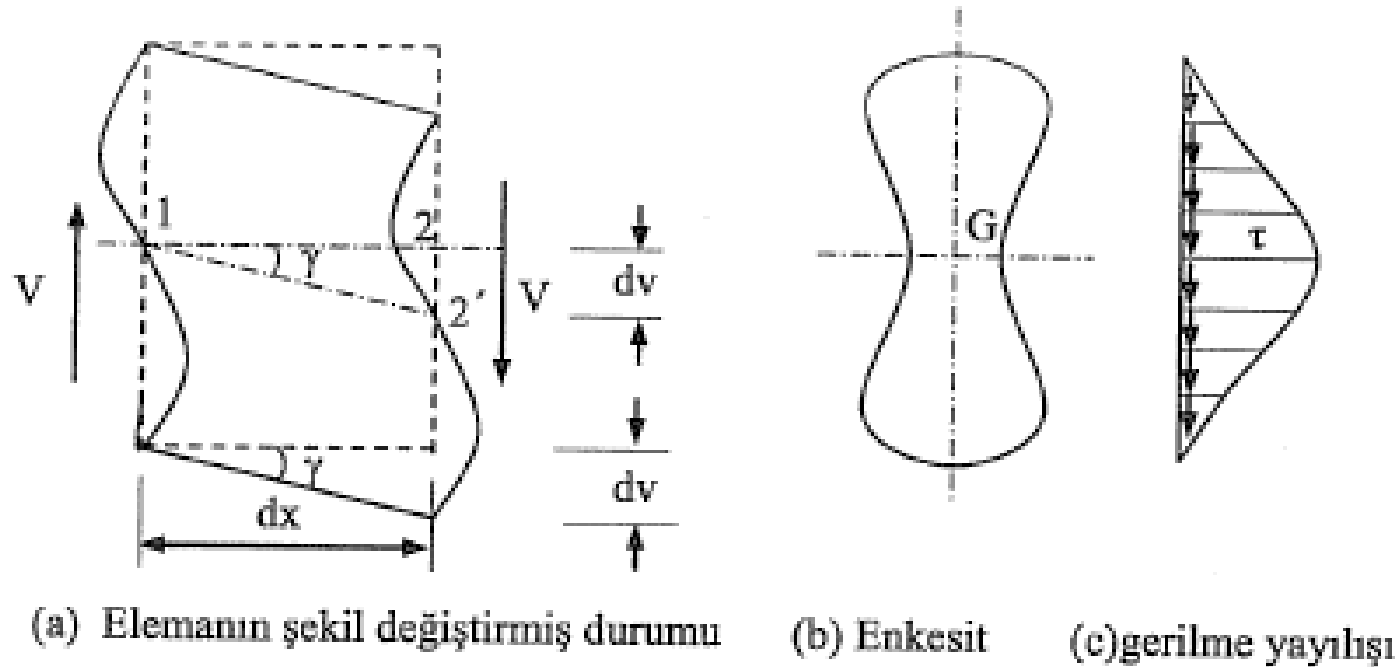
ve aralarında L uzaklığı bulunan iki kesit arasındaki şekil değiştirmeden sonraki açı

$$\Delta\varphi = \int_0^L \frac{M}{EI} dx \quad (1.1.25)$$

olarak bulunur. Burada EI 'ya **çubuğun eğilme rijitliği** denir. Görüldüğü gibi eğilme rijitliği büyüdükçe açı küçülmektedir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.1.2.3 Kesme Kuvvetinden Meydana Gelen Şekil Değiştirmeler (Kayma Şekil Değiştirmesi)



Şekil 1.1.5 Kayma şekil değiştirmesi

Şekil 1.1.5’de görüldüğü gibi iki ucunda V kesme kuvveti etkileyen dx uzunluğundaki bir çubuğun uç kesitleri bir birlerine göre kesme kuvveti doğrultusunda yer değiştirir. Buna **kayma şekil değiştirmesi** denir. Burada Bernoulli hipotezi geçerli değildir. Kesme kuvveti etkisiyle şekil değiştirme $\int$ şeklindedir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Şekil değiştirdikten sonra kesitlerin hem düzlemsellikleri ve hem de kiriş eksenine olan diklikleri bozulmuştur. Birinci merteye teorisi geçerli olduğundan

$$\gamma \ll 1 \quad \text{ve} \quad \text{tg} \gamma \cong \gamma \quad (1.1.26)$$

dır. Geometrik bağıntılardan:

$$\gamma = \frac{dv}{dx} \quad (1.1.27)$$

yazılabilir. Hooke kanununa göre kayma birim şekil değiştirmesi

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (1.1.28)$$

ve kayma gerilmesi

$$\tau = \frac{V}{A} k' \quad (1.1.29)$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

τ yerine (1.1.28) eşitliğindeki değeri yerine konularak

$$\gamma = k' \cdot \frac{V}{GA} \quad (1.1.30)$$

yazılır. Burada G kayma modülü ve k' kayma gerilmesinin kesit üzerinde üniform dağılmadığını ifade eden ve kesitin geometrisine bağlı olarak belirlenen bir katsayıdır. Buna şekil faktörü de denir.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

(1.1.27) ve (1.1.30) eşitliklerinden

$$\gamma = \frac{dv}{dx} = \frac{V}{GA} k' \quad (1.1.31)$$

bulunur. Buradan çubuğun dx boyundaki dv kayması

$$dv = \gamma dx = k' \frac{V}{GA} dx \quad (1.1.32)$$

bulunur. İndirgenmiş kesit alanı

$$A' = A/k' \quad (1.1.33)$$

şeklinde tanımlanırsa ve (1.1.32) eşitliğinde yerine konulursa

$$dv = \frac{V}{GA'} dx \quad (1.1.34)$$

elde edilir. Burada GA' 'ne **kayma rijitliği** denir. Bir kesitin kayma rijitliği ne kadar büyükse kayma şekil değiştirmesi o kadar küçük olur.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.1.3 Elastik Mesnetlerden Meydana Gelen Şekil Değiştirmeler

1.1.3.1 Elastik çöken mafsallı mesnetler

Bu mesnetler, yalnız çubuk eksenini doğrultusunda reaksiyon kuvveti alabilen ve bu doğrultudaki kuvvet etkisiyle elastik olarak şekil değiştiren mesnetlerdir. Sağlam zemine oturmayan temeller, neopren mesnetler bu tür mesnetler olarak düşünülebilir. Temel yükü nedeni ile zeminde meydana gelen sıkışma temelin elastik olarak çökmesine neden olur. Zemin sıkışması statik olarak bir yayın sıkışması ile ifade edilir ve elastik şekil değiştirmeler (çökmeler) $k_{\Delta L}$ yay katsayısı (mesnet redörü) yardımıyla hesaplanır. $k_{\Delta L}$ yay katsayısı (L) mesnedinin $\Delta v_L = 1$ birim kadar çökmesi için gerekli olan normal kuvvet olarak tarif edilir. Burada L mesnet numarasıdır. Bu eksenel şekil değiştirmedir. Değeri zemin cinsine ve temel boyutlarına bağlı olarak hesaplanır. Temel tabanı alanı A ve yatak katsayısı K ile gösterilirse bu temelde yay katsayısı

$$k_{\Delta} = A.K \tag{1.1.35}$$

olarak bulunur.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiş-tirmeler

Zemin cinsine bağı olarak yatak katsayıları Çizelge 1.1.1'de verilmiştir. Şekil 1.1.7a'da görülen sistemde L mesnedindeki yay katsayısı $k_{\Delta L}$ olduğuna göre N_L normal kuvveti veya R_{Ly} mesnet tepkisinden dolayı elastik mesnetteki çökme miktarı

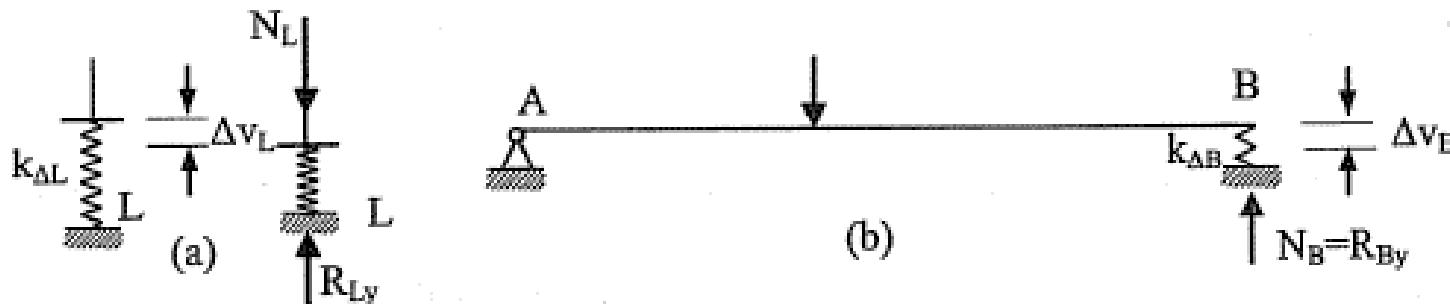
$$\Delta v_L = \frac{N_L}{k_{\Delta L}} = \frac{R_{Ly}}{k_{\Delta L}} \quad (1.1.36)$$

olarak bulunur. Şekil 1.1.7b 'de görülen sistemde B mesnedi altında yay katsayısı

$k_{\Delta B}$ olan elastik bir mesnette R_{By} mesnet tepkisi ile meydana gelen çökme

$$\Delta v_B = \frac{R_{By}}{k_{\Delta B}} \quad (1.1.37)$$

eşitliğinden hesaplanır.



Şekil 1.1.7 Elastik çöken mesnet nedeni ile şekil değiştirme

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Çizelge 1.1.1 Zemin Yatak katsayıları

Zemin cinsi	Yatak katsayısı K (kN/m ³)
Balçık; turba	< 2000
Plastik kil	5000 ~ 10000
Yarı sert kil	10000 ~ 15000
Sert kil	15000 ~ 30000
Dolgu toprak	10000 ~ 30000
Gevşek kum	10000 ~ 20000
Orta sıkı kum	20000 ~ 50000
Sıkı kum	50000 ~ 100000
Kuru kil	40000 ~ 60000
Sıkı çakıl ve kum	100000 ~ 150000
Çok sıkı çakıllı zemin	200000 ~ 300000
Damarlı şist	400000 ~ 600000
Sağlam şist	> 500000
Kaya	> 2000000

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

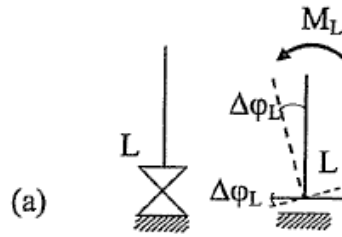
1.1.3.2 Elastik dönen mesnet ve birleşimler

Çubuk eksenine dik ve paralel doğrultularda tam bağımlı ($v = u = 0$) olan fakat elastik olarak (momentle doğru orantılı olarak) dönebilen mesnetlere elastik ankastre mesnetler denir. Elastik çöken mesnetlerde olduğu gibi elastik şekil değiştirmeler (dönmeler) burada da $k_{\phi L}$ yay katsayısı (mesnet redörü) yardımı ile hesaplanır. Bu $k_{\phi L}$ yay katsayısı L mesnedinin $\Delta\phi_L = 1$ birim kadar dönmesi için gerekli olan moment olarak tarif edilir. Çökmeye ve dönmeye karşı yay katsayılarını ayrı ayrı tanımlamak için yukarıda görüldüğü gibi çökme ile ilgili yay katsayısı k_{Δ} , dönme ile ilgili yay katsayısı k_{ϕ} ile gösterilmiştir. Bu mesnetler Şekil 1.1.8(a) ve (b)'de görüldüğü gibi gösterilir. Değerleri zemin cinsine ve temel boyutlarına bağlı olarak hesaplanır. Temel tabanı atalet momenti I ve yatak katsayısı K ile gösterilirse bu temelde dönme ile ilgili yay katsayısı

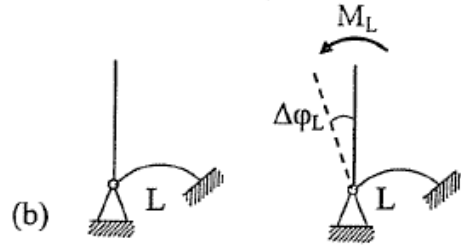
$$k_{\phi} = I.K \quad (1.1.38)$$

olarak bulunur.

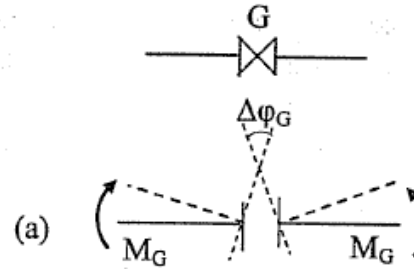
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



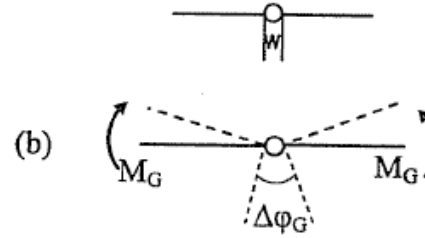
$$\Delta\varphi_L = \frac{M_L}{k_{\varphi L}}$$



Şekil 1.1.8 Elastik dönen Mesnetler.



$$\Delta\varphi_G = \frac{M_G}{G k_{\varphi G}}$$



Şekil 1.1.9 Elastik dönen ara birleşim

Şekil 1.1.8 (a) ve (b)'de görüldüğü gibi L mesnedindeki yay katsayısı $k_{\varphi L}$ ve dönme $\Delta\varphi_L$ ise mesnedin karşılayabileceği moment

$$M_L = k_{\varphi L} \Delta\varphi_L \quad (1.1.39)$$

olur. Şekil 1.1.9 (a) ve (b)'de görüldüğü gibi G ara birleşiminde yay katsayısı $k_{\varphi G}$ ve dönme $\Delta\varphi_G$ ise karşılanabilecek ara birleşim momenti

$$M_G = k_{\varphi G} \Delta\varphi_G \quad \text{olur.} \quad (1.1.40)$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.1.3.3 Elastik dönen ve iki doğrultuda elastik hareket eden mesnetler

x ve y doğrultularında elastik çöken mesnetlerin yay katsayıları sıra ile $k_{\Delta u}$ ve $k_{\Delta v}$ ve elastik dönen mesnedin yay katsayısı k_{φ} ile gösterilmiştir. Buna göre u ve v doğrultularındaki R_x ve R_y mesnet tepkileriyle ve M mesnet momentiyile meydana gelen yer değiştirme ve dönmeler sırayla

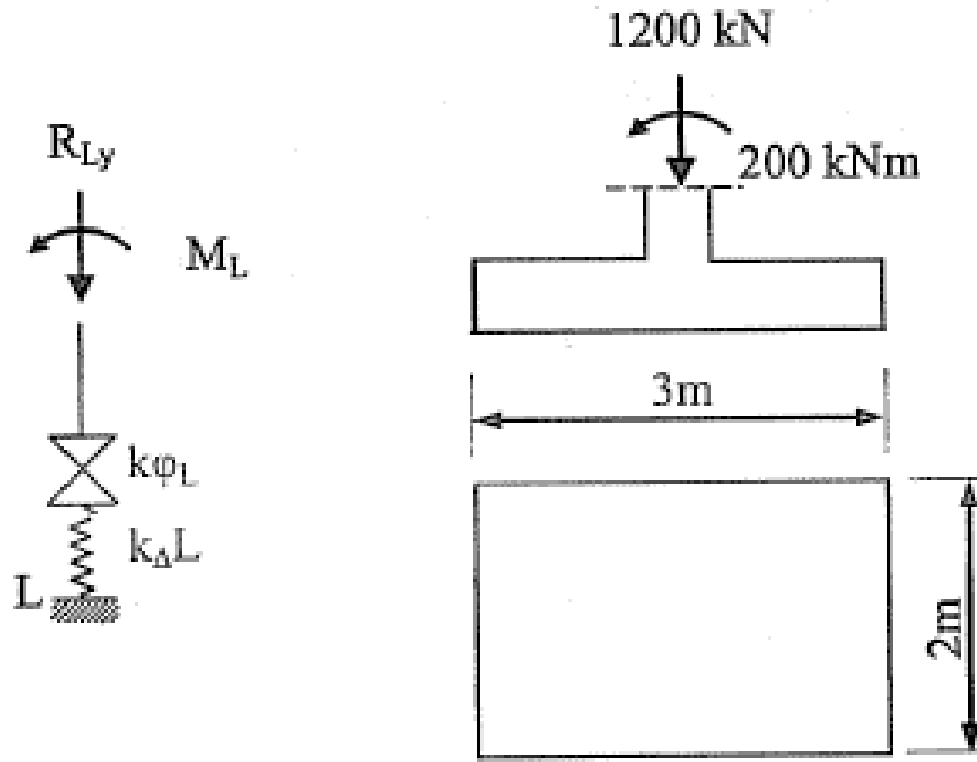
$$\Delta u = \frac{R_x}{k_{\Delta u}}, \quad \Delta v = \frac{R_y}{k_{\Delta v}}, \quad \Delta \varphi = \frac{M}{k_{\varphi}} \quad (1.1.41.a,b,c)$$

eşitlikleri ile verilir. Çökmelerin karşılıklı tesiri olmadığı için bunlara basit elastik mesnet denir.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Örnek 1.1.1



(a) İdealleştirilmiş mesnet

(b) Temel boyutları

Şekil 1.1.10 Elastik çöken ve elastik dönen temel

Şekil 1.1.10(b)'de boyutları ve yükleme durumu verilen temelin oturduğu zeminin yatak katsayısı $K = 50000\text{ kN/m}^3$ olduğuna göre elastik çökme yay katsayısını ve elastik dönme yay katsayısını hesaplayınız.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Çözüm

Mesnedin idealleştirilmiş biçimi Şekil 1.1.10(a)'da gösterilmiştir.

Temelin alanı $A = 2 \times 3 = 6 \text{ m}^2$, temelin moment etkiye yönüne göre atalet momenti

$$I_y = \frac{2 \times 3^3}{12} = 4,5 \text{ m}^4$$

bulunur. 1.1.35 ve 1.1.38 eşitliklerinden

$$k_{\Delta v} = 6 \times 50000 = 300000 \text{ kN / m}$$

ve $k_{\varphi} = 4,5 \times 50000 = 225000 \text{ kNm}$

bulunur. Bu değerlere göre temeldeki çökme ve dönme değerleri sırayla

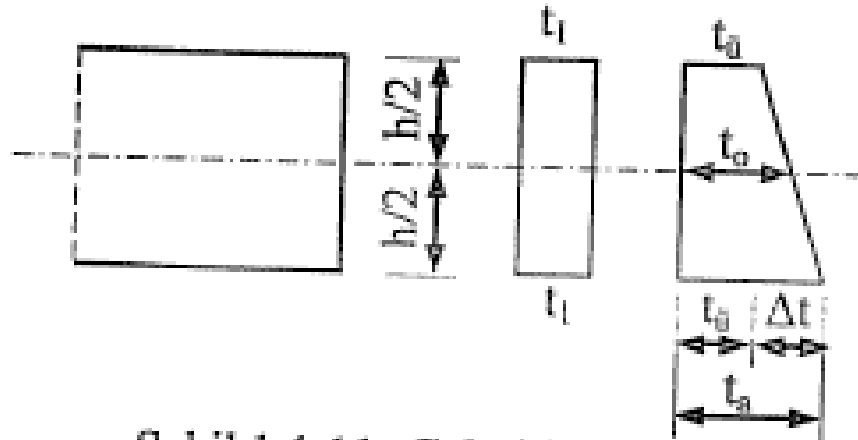
$$\Delta v = \frac{1200}{300000} = 0,004 \text{ m} = 4 \text{ mm}$$

$$\Delta \varphi = \frac{200}{225000} = 0,00089 \text{ radyan} \quad \text{bulunur.}$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.1.4 Sıcaklık Değişiminden Meydana Gelen Şekil Değiştirmeler

Sıcaklık değişimleri, yapı malzemesinde meydana gelen fiziksel olaylar sebebiyle çubuğun şekil değiştirmesine neden olur. Başlangıçtaki sıcaklığı t_1 olan



Şekil 1.1.11- Çubuklarda sıcaklık değişimi

bir kesitin sıcaklık değişiminden sonra üst liflerinin sıcaklığı t_0 ve alt liflerinin sıcaklığı t_a olur. Kesit yüksekliği boyunca değişimin doğrusal olduğu kabulüne göre orta liflerdeki sıcaklık

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_0 + t_a) \quad (1.1.41)$$

olur. Bu durumda orta lifteki sıcaklık değişimine **üniform sıcaklık değişimi** denir, t ile gösterilir ve değeri

$$t = \frac{1}{2}(t_0 + t_a) - t_1 = t_0 - t_1 \quad \text{dir.} \quad (1.1.42)$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Alt liflerdeki sıcaklık değişimi ile üst liflerdeki sıcaklık değişimi farkına da farklı sıcaklık değişmesi denir, Δt ile gösterilir ve değeri

$$\Delta t = t_a - t_u \quad (1.1.43)$$

dür. Yukarıda da açıklandığı gibi sıcaklık değişimi üniform sıcaklık değişimi ve farklı sıcaklık değişimi olmak üzere iki ayrı durumda incelenecektir.

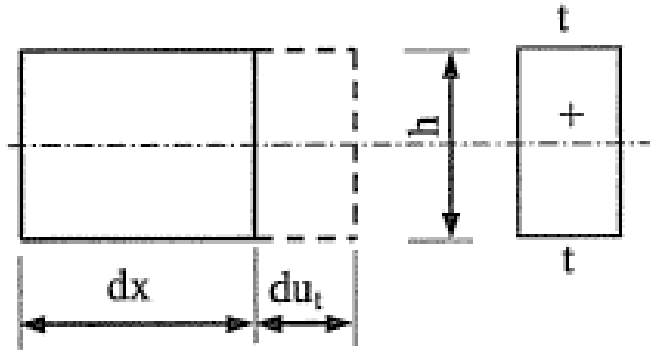
1.1.4.1 Üniform sıcaklık değişiminden meydana gelen şekil değiştirme

Üniform sıcaklık değişiminde çubuğun h yüksekliği boyunca sıcaklık aynıdır. Sıcaklık artması (+) ve sıcaklık eksilmesi (-) ile gösterilir. Şekil 1.1.12’de sıcaklık artması olan dx uzunluğunda bir diferansiyel eleman göz önüne alınmıştır.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Sıcaklık artması olduğundan dx uzunluğundaki çubuk du_t kadar uzayacaktır. Geometrik bağıntıdan birim boydaki şekil değiştirme



Şekil 1.1.12 dx uzunluğundaki bir çubukta sıcaklık artması nedeni ile şekil değiştirme

$$\varepsilon_t = \frac{du_t}{dx} \quad (1.1.44)$$

ve t sıcaklık farkından birim boyda meydana gelen şekil değiştirme

$$\varepsilon_t = t \cdot \alpha_t \quad (1.1.45)$$

dir. Burada t çubukta meydana gelen sıcaklık artışı veya azalması, α_t yapı malzemesinin genleşme katsayısıdır.

Beton için $\alpha_t = 10^{-5} 1/C^\circ$ ve çelik için $\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} 1/C^\circ$ 'dir. ε_t 'nin (1.1.44) ve (1.1.45) eşitliklerindeki değerleri bir birine eşitlenirse

$$\varepsilon_t = \frac{du_t}{dx} = t \cdot \alpha_t \quad (1.1.46)$$

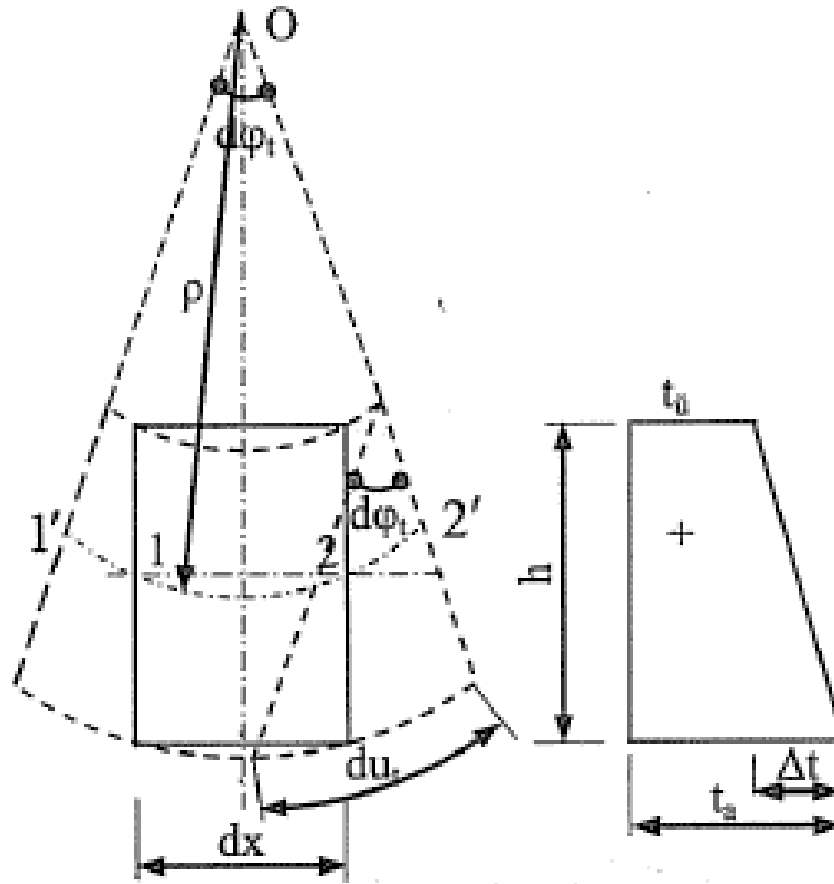
yazılır ve buradan dx uzunluğundaki çubuğun uzaması

$$du_t = \varepsilon_t dx = t \cdot \alpha_t dx \quad (1.1.47)$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi bu şekil değiştirme eksenel şekil değiştirmedir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.1.4.2 Farklı sıcaklık değişiminden meydana gelen şekil değiştirme



Şekil 1.1.13. Farklı sıcaklık değişiminde şekil değiştirme

Şekil 1.1.14'de görüldüğü gibi farklı sıcaklık değişimi, çubuk kesiti- nin h yüksekliği boyunca doğrusal olarak değiştiği kabul edilen sıcaklık farkıdır. Üst ve alt lifler arasındaki sıcaklık farkı eşitlik (1.1.43)'de verildiği gibi $\Delta t = t_a - t_0$ 'dür.

Şekil 1.1.13'de görüldüğü gibi kesitin üst lifleri ve alt lifleri farklı sıcaklıkta olduğundan birbirinden farklı biçimde uzamışlardır. Bunun sonucu olarak 1 ve 2 kesitleri birbirlerine göre $d\phi_t$ kadar dönmüş ve 1' ve 2' noktalarına gitmişlerdir. Şekil değiştirmiş elemanın sağ üst ucundan

sol yan kenara bir paralel çizilirs çubuğun alt ve üst uçları arasındaki uzama farkı du_t bulunur.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Buna göre geometrik bağıntıdan çubuğun iki kenarının bir birine göre dönme miktarı

$$d\varphi_t = \frac{du_t}{h} \quad (1.1.48)$$

ve fiziksel özellikten

$$du_t = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot dx \quad (1.1.49)$$

bulunur. du_t 'nin (1.1.49) eşitliğindeki değeri (1.1.48) eşitliğinde yerine konulursa

$$d\varphi_t = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t \cdot dx}{h} \quad (1.1.50)$$

elde edilir. Diğer yandan bilindiği gibi birim dönme (eğrilik)

$$\omega_t = \frac{1}{|\rho|} = \frac{d\varphi_t}{dx} \quad (1.1.51)$$

dir. Burada $d\varphi_t$ yerine (1.1.50) eşitliğindeki değeri konulursa

$$\omega_t = \frac{1}{|\rho|} = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \quad (1.1.52)$$

elde edilir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

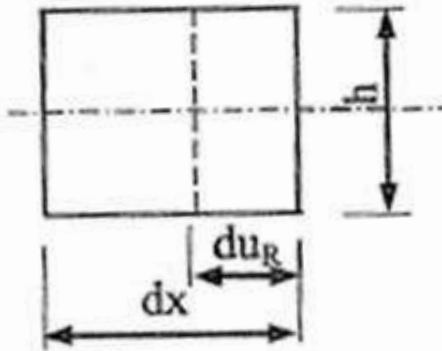
1.1.5 Malzemenin Viskoelastik Özelliklerinden Meydana Gelen Şekil Değiştirmeler

1.1.5.1 Rötire

Çubukların boyunda, yükten bağımsız zamana bağlı olarak meydana gelen kısalmaya rötire denir. Yapı malzemeleri içinde beton rötrenin en çok etkin olduğu malzemedir. Taze dökülmüş bir beton çubuktaki boy kısaltmaları izlenecek olursa, değişimin başlangıçta oldukça büyük olduğu, zaman ilerledikçe azaldığı ve bir süre

sonra durduğu görülür. Rötreden meydana gelen şekil değiştirmeler bir sıcaklık azalması gibi hesaplanabilir. Şekil 1.1.14'de görülen dx uzunluklu bir çubukta rötreden meydana gelen boy kısaltması

$$du_R = -\varepsilon_R . dx \quad (1.1.53)$$



Şekil 1.1.14-Rötire etkisi

şeklinde yazılır. Burada ε_R , rötire katsayısı olup

birim uzunluktaki çubukta rötreden meydana gelen boy kısaltmasıdır. Değeri yapı malzemesinin cinsine göre deneylerle tespit edilir veya ilgili şartnamelerden alınır. Betonda $10^{-4} \sim 6 \times 10^{-4}$ 'dür. Mustafa İnan 2×10^{-4} alınabileceğini belirtmiştir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.1.5.2 Sünme

Yapı Malzemesinin viskoelastik özelliği sebebiyle, sabit gerilme altında zamana bağlı şekil değiştirmeye sünme denir. Betonda normal sıcakta, çelikte ise $300^{\circ} - 400^{\circ}\text{C}$ 'nin üstündeki sıcaklıklarda sünme meydana gelir. Sünmeden meydana gelen şekil değiştirmeler, iç kuvvetlerden meydana gelen şekil değiştirmeler φ_s sünme katsayısı ile çarpılarak elde edilir. φ_s değeri, sıcaklık, rutubet v.b gibi çeşitli faktörler ve malzemenin cinsine bağlı olarak deneylerle tespit edilmiş ve ilgili şartnamelerde verilmiştir. Beton da $\varphi_s = 1 \sim 4,5$ arasında alınabilir.

Normal kuvvet etkisindeki bir çubukta sünme şekil değiştirmesi

$$du_s = \varphi_s \frac{N}{EA} dx \quad (1.1.54)$$

Eğilme momenti etkisindeki bir çubukta sünme şekil değiştirmesi

$$d\varphi_s = \varphi_s \frac{M}{EI} dx \quad (1.1.55)$$

ile hesaplanır. Çubuk sistemlerde V kesme kuvveti tesiriyle meydana gelen sünme şekil değiştirmesi çoğunlukla ihmal edilir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

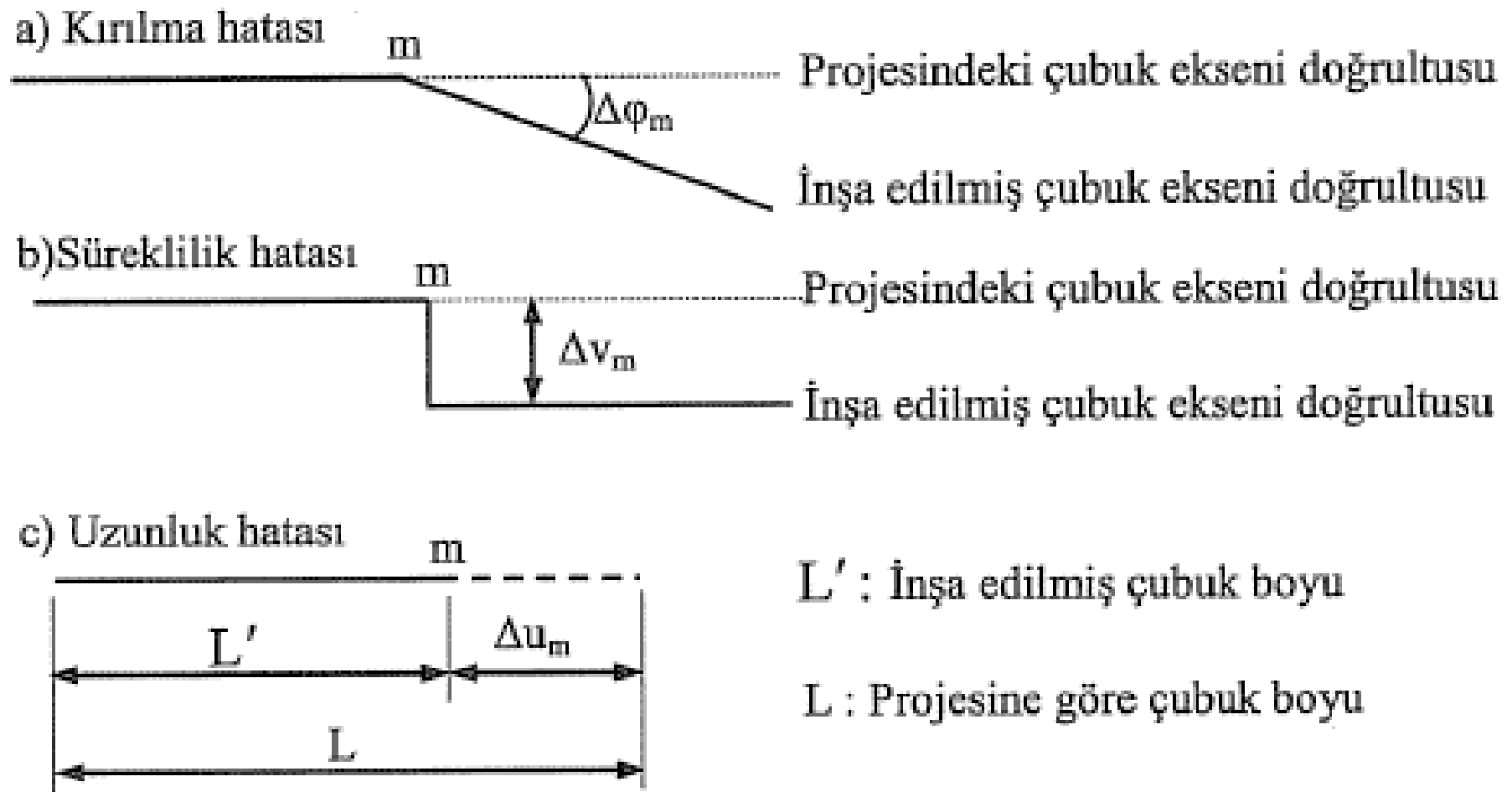
1.1.6 Yapım Hatalarından Meydana Gelen Şekil Değiştirme

Yapı elemanlarının boyutlar ve süreklilik yönünden projeye göre kusurlu inşa edilmesinden kaynaklanan hatalara “yapım hataları” denir. Bu hatalar izostatik sistemlerde sadece şekil değişikliğine sebep olur. Hiperstatik sistemlerde şekil değişikliğinin yanında ilave iç kuvvetlerin meydana gelmesine neden olur.

Genel olarak iki yer değiştirme ve dönme yapacak şekilde bu hatalarla karşılaşılır. Şekil 1.1.15a’da görülen çubuk doğru olması gerekirken m noktasından itibaren $\Delta\varphi_m$ kadar döndürülerek inşa edilmiştir. Şekil 1.1.15b’de görülen çubuk doğru eksenli olması gerekirken m noktasında Δv_m kadar ani bir düşey yer değiştirme yapacak şekilde inşa edilmiştir. Şekil 1.1.15c’de görülen çubukta L uzunluğunda olması gerekirken L' uzunluğunda yapılmış ve dolayısıyla çubuk eksenini doğrultusunda Δu_m kadar kısalmıştır.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



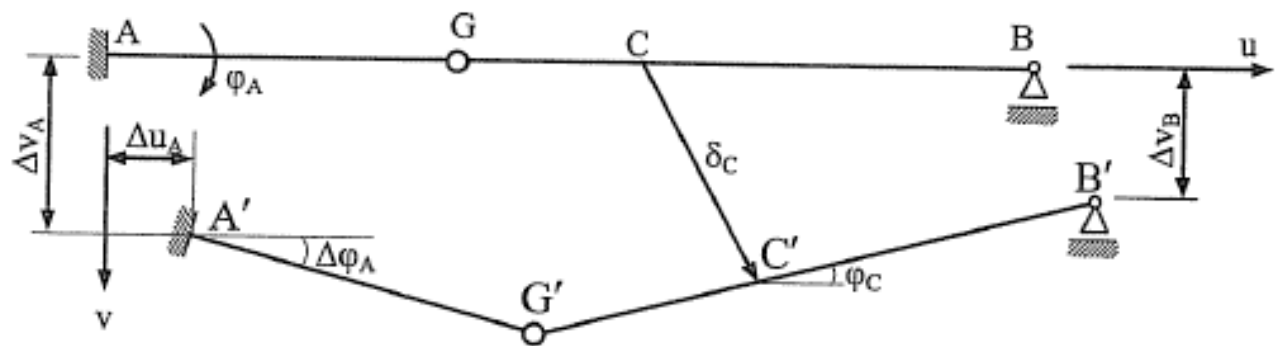
Şekil 1.1.15 Yapım hatalarından kaynaklanan şekil değiştirmeler

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.1.7 Mesnet Şartlarının Değişmesinden (Mesnet Hareketlerinden) Oluşan Şekil Değiştirmeler

Sistemi idealleştirirken ve projesinde öngörülen mesnet şartlarında meydana gelen küçük değişmelere “mesnet şartlarındaki değişmeler veya mesnetlerin hareketi” denir. Örneğin Şekil 1.1.16’da A mesnedi projelendirilirken ankastre bir mesnet olarak yani $u_A = v_A = \phi_A = 0$ olacak şekilde düzenlenmiştir. Ancak mesnedin bağlandığı ortamdaki bozulmalar nedeni ile A mesnedi Δu_A kadar yatay, Δv_A kadar düşey yer değiştirerek ve $\Delta \phi_A$ kadar dönerek A noktasından A’ noktasına gitmiştir. B mesnedi hareketli mesnet olarak düşünülmüş olup $v_B = 0$ iken Δv_B kadar düşey yer değiştirmiş ve B noktası B’ noktasına gitmiştir. Bu mesnet şartlarındaki değişmeler nedeni ile AGB sistemi A’B’G’ sistemi haline gelmiştir. Bu mesnet hareketleri sonucunda sistem üzerindeki C noktası da δ_c

kadar yer değiştirerek C’ noktasına gelecek ve C’ noktasındaki dönme açısı ϕ_C kadar olacaktır.



Şekil 1.1.16 Mesnet şartlarındaki değişmeler

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiş-tirmeler

Mesnet şartlarındaki değişimler zemin özelliklerinin bozulmasından, zeminlerin tasman yapmasından veya akarsu üzerinde bulunan köprü orta ayaklarının temellerinin altının oyulmalarından meydana gelebilir. İzostatik sistemlerde mesnet bağları sistemin küçük mesnet hareketlerine uymasına imkan verdiğinden sistemi oluşturan çubuklarda bünyesel şekil değiştirme olmadan, diğer bir anlatımla ilave gerilmeler meydana gelmeden sistem sadece konum değiştirir. Bu durumda herhangi bir C noktasındaki δ_C yer değiştirmesi ve φ_C dönme açısı geometrik bağıntılardan da kolaylıkla hesaplanabilir. Ancak bunları da ileride anlatılacak hesap yönteminin içinde formüle etmek yerinde olacaktır. Bu mesnet şartlarındaki değişimler L mesnet adını göstermek üzere Δv_L , Δu_L , $\Delta \varphi_L$ şeklinde gösterilecektir.

Hiperstatik sistemlerde sistem mesnet hareketlerine uyamaz ve zorlamaya maruz kalır. Sistemde hem şekil değiştirme ve hemde ilave iç kuvvetler meydana gelir.

1.2 YAPI SİSTEMLERİNDE YER DEĞİŞTİRMELER

1.2.1 Giriş

Mühendislik sistemleri gerilme ve yük etkisinde bir miktar şekil değiştirecek malzemelerden inşa edilir. Bu şekil değiştirmenin sonucu olarak sistem üzerindeki noktaların hareketine yer değiştirme denir.

Malzeme elastik limitler aşılmamak şartı ile bu şekil değiştirmeler sonucu oluşan yer değiştirmeler, gerilmelerin ortadan kalktığı ve orijinal değerine döndüğü zaman kaybolur. Bu tür şekil ve yer değiştirmeler elastik olarak isimlendirilir. Bazı durumlarda yer değiştirme sebebi kalktıktan sonra da sürekli olarak kalır ve bu nedenle oluşan yer değiştirme hiçbir zaman kaybolmaz. Bu tip yer değiştirmeler yukarıda anılan elastik tipten ayırt etmek için plastik (non-elastik) olarak isimlendirilir. Her iki durumda da şekil ve yer değiştirmelerin sistemdeki gerilmeli ve gerilmesiz sebeplerden meydana geldiğine dikkat edilmelidir. Bu durum daha sonra detaylı olarak incelenecektir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Yapı mühendisliğinde yer değiştirmelerin hesaplanmasına sık sık ihtiyaç duyulur. Örneğin, konsol ve sürekli köprülerin veya hareketli köprülerin kalkan kısımlarının inşaatında sistemdeki değişik noktaların yer değiştirmelerini hesaplamak zorunludur. Yapılarda yer değiştirmelerin hesabı limit durumların kontrolü için gereklidir. Sistemlerin titreşim ve dinamik hareketlerinin analizi için de yer değiştirmelerin hesaplanması gerekir. Belki de yapı mühendisliğinde yer değiştirmelerin hesaplanmasının en önemli sebebi hiperstatik sistemlerin analizinde yükler altındaki yer değiştirmelerin geniş bir şekilde kullanılmasıdır.

Yer değiştirmelerin hesabı için literatürde çok sayıda yöntem sunulmuştur. Bu yöntemlerden çok genel ve kullanışlı olanların bazıları aşağıda incelenmiştir.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bu yöntemleri iki genel başlık altında toplayabiliriz.

1. Her hangi bir durumda özel bir yer değiştirme bileşenini hesaplamak için kullanılan yöntemler.

1.1- Virtüel iş yöntemi (her tip sistemlerde kullanılabilir)

1.2- Castigliano'nun ikinci teoremi (her tip sisteme uygulanabilir)

2. Birkaç yer değiştirme bileşenini hesaplamak için kullanılan yöntemler

2.1- Williot-Mohr yöntemi (sadece kafes sistemlerde uygulanabilir)

2.2- Bar-Chain yöntemi (sadece kafes sistemlere uygulanabilir)

2.3- Mohr yöntemi- moment alanı yöntemi (elastik yük yöntemi veya eşdeğer kiriş yöntemi, kiriş ve çerçevelere uygulanabilir).

2.4- Elastik eğri diferansiyel eşitliği



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.2 Yer ve Şekil Değiştirme İşi

Şekil değiştirme işi ile ilgili esaslara ve enerji esasına dayanan yöntemlere geçmeden önce işin nasıl hesaplandığını bilmek gerekir. İş genelde W ile gösterilir. Bilindiği gibi bir P kuvvetinin kendi doğrultusunda δ kadar yol alması ve bir M momentinin kendi etkidiği yerde ve doğrultusunda ϕ açısı kadar dönmesi sonucunda meydana gelen W işi sırayla

$$W = P \cdot \delta \quad \text{ve} \quad W = M \cdot \phi \quad (1.2.1a,b)$$



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

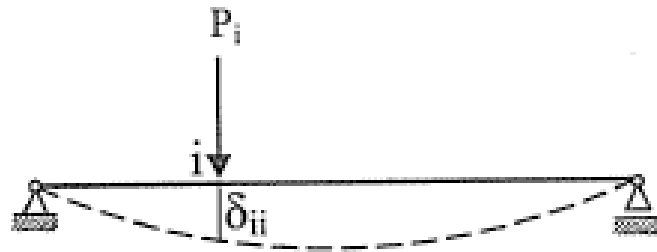
P ile δ ve M ile ϕ aynı yönde ise yapılan iş pozitif, ters yönde ise yapılan iş negatif olur. Bu genel tarife dayanılarak bir sistemde meydana gelen işleri hesaplamak mümkündür. Yapı sistemlerinde dış kuvvetlerle yer değiştirmelerin yapmış olduğu işe **yer değiştirme işi** veya **dış iş** denir ve W_d ile gösterilir. İç kuvvetlerin (gerilmelerin) şekil değiştirmelerle yapmış olduğu işe **şekil değiştirme işi** veya **iç iş** denir ve W_i ile gösterilir. Diğer bir anlatımla yer değiştirmelerin yaptığı işe dış iş ve şekil değiştirmelerin yaptığı işe iç iş denir. Bir dış kuvvetin kendisinden meydana gelen yer değiştirme ile veya aynı sebepten meydana gelen iç kuvvetle şekil değiştirmenin yaptığı işe **aktif iş** denir. Sistemde bir dış kuvvetle başka bir kuvvetten meydana gelen yer değiştirme ile veya bir iç kuvvetle başka bir sebepten meydana gelen şekil değiştirme ile yapılan işe **pasif iş** denir.



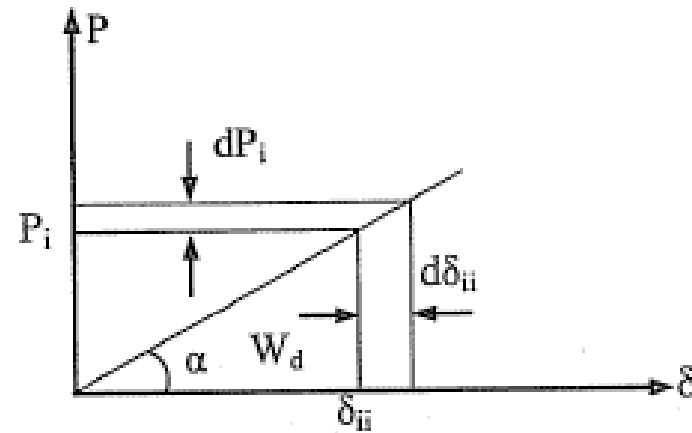
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.2.1 Dış Kuvvetlerin Yer Değiştirme İşi (Dış İş)

1.2.2.1.1 Aktif dış iş



Şekil 1.2.1a



Şekil 1.2.1b Kuvvet yer değiştirme ilişkisi

Şekil 1.2.1a'da görüldüğü gibi bir sistemin i noktasında bir P_i kuvveti yavaş yavaş artırılarak yüklensin. Bu P_i kuvvetinden bunun doğrultusunda meydana gelen yer değiştirme δ_{ii} olur. Yük yavaş yavaş artırılarak yüklendiğinden P ve δ arasındaki bağıntı doğrusal olup Şekil 1.2.1b'de gösterildiği gibidir. P_i kuvveti dP_i kadar değişirse δ_{ii} yer değiştirmesi de $d\delta_{ii}$ kadar değişir. Bu durumda P_i kuvvetinin $d\delta_{ii}$ ile yapmış olduğu iş $dW_d = P_i d\delta_{ii}$ olur.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Toplam iş

$$W_d = \int_0^{\delta_{ii}} P_i d\delta_{ii} \quad (1.2.3)$$

yazılır. Şekil 1.2.1b'deki $P - \delta$ ilişkisinden

$$\operatorname{tg} \alpha = c = \frac{P_i}{\delta_{ii}} \quad (1.2.4a)$$

ve buradan

$$P_i = c \cdot \delta_{ii} \quad (1.2.4b)$$

yazılır. (1.2.3) eşitliğinde P_i yerine (1.2.4b) eşitliğindeki değeri yerine konulur ve c sabit olduğundan integralin dışına alınırsa

$$W_d = c \int_0^{\delta_{ii}} \delta_{ii} d\delta_{ii} \quad (1.2.5)$$

yazılır ve integral işlemi yapılarak

$$W_d = c \frac{\delta_{ii}^2}{2} \quad (1.2.6)$$

elde edilir.

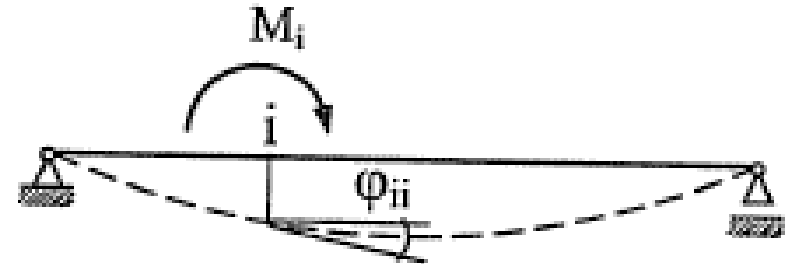
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Burada c yerine (1.2.4a) eşitliğindeki değeri yerine konularak

$$W_d = \frac{1}{2} P_i \delta_{ii} \quad (1.2.7)$$

bulunur. Buradaki $\frac{1}{2}$ çarpanı Şekil 1.2.1b eşitliğinden de açıkça görüldüğü gibi kuvvet-yer değiştirme bağıntısının doğrusal olmasından ileri gelmektedir. Benzer şekilde Şekil 1.2.2'de görüldüğü gibi bir i düğüm noktasında etkiyen M_i momentinin i noktasında kendisinden meydana gelen ve kendisi doğrultusundaki φ_{ii} dönme açısı ile yapmış olduğu iş

$$W_d = \frac{1}{2} M_i \varphi_{ii} \quad (1.2.8)$$



Şekil 1.2.2

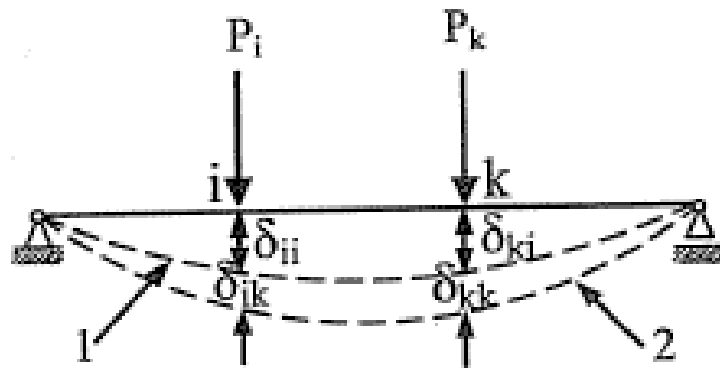
yazılır.

Özet olarak dış kuvvetlerin aktif yer değiştirme işi kuvvet ile kuvvetin tatbik noktası ve doğrultusunda kendisinin sebep olduğu yer değiştirme ile çarpımının yarısına eşittir.

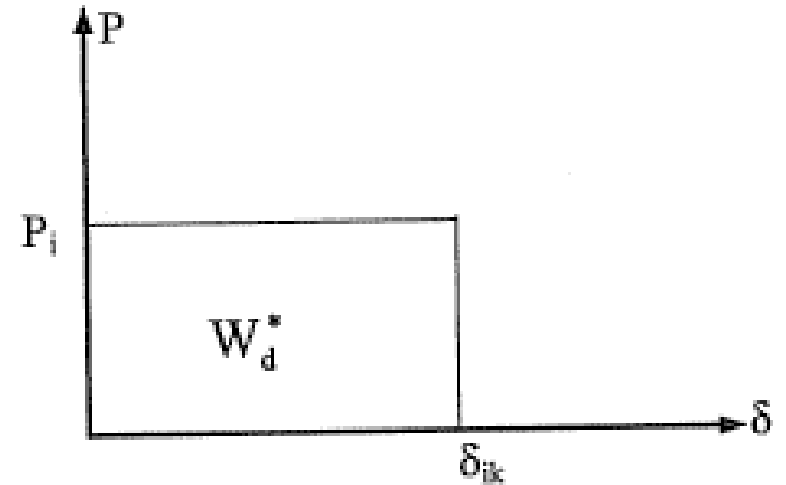
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.2.1.2 Pasif iş

Şekil 1.2.3a'da görüldüğü gibi sisteme önce i noktasındaki P_i tekil yükü etkisin. Bu durumda 1 eğrisi ile gösterilen yer değiştirmeler meydana gelir ve i noktasında P_i doğrultusundaki yer değiştirme δ_{ii} ve k noktasında P_k doğrultusundaki yer değiştirme δ_{ki} olur. P_i kuvveti ile yüklü sisteme sonra k noktasında P_k tekil kuvveti etkidiğinde 2 eğrisi ile gösterilen yer değiştirmeler meydana gelir ve i noktasında P_i doğrultusundaki yer değiştirme δ_{ik} ve k noktasında P_k doğrultusundaki yer değiştirme δ_{kk} olur.



Şekil 1.2.3 a



Şekil 1.2.3b Kuvvet yer değiştirme bağıntısı

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bu durumda P_i kuvveti, P_k kuvvetinden meydana gelen δ_{ik} yer değiştirmesi ile ve P_k kuvveti P_i kuvvetinden meydana gelen δ_{ki} yer değiştirmesi ile iş yapar. Burada olduğu gibi bir kuvvet ile başka bir kuvvetten meydana gelen yer değiştirmenin yaptığı işe pasif dış iş denir ve W_d^* ile gösterilir. Bu durumda P_i ile yapılan iş

$$W_d^* = \int_0^{\delta_{ik}} P_i d\delta_{ik} \quad (1.2.9a)$$

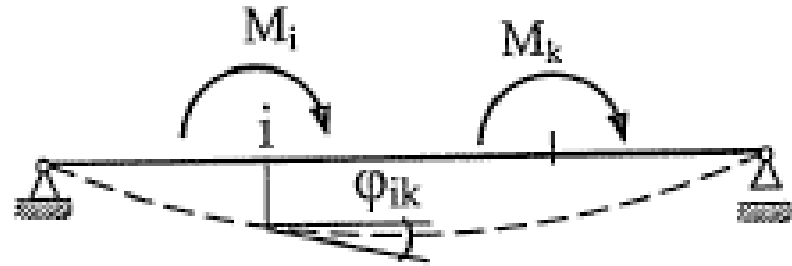
şeklinde yazılır. Burada P_i sabit olduğundan integralin dışına çıkarılır ve integral işlemi yapılırsa

$$W_d^* = P_i \delta_{ik} \quad (1.2.9b)$$

elde edilir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Dış kuvvetin moment olması durumunda (Şekil 1.2.3 c) benzer şekilde



Şekil 1.2.3 c

pasif dış iş

$$W_d^* = M_i \phi_{ik} \quad (1.2.9c)$$

şeklinde yazılır.

Özet olarak dış kuvvetlerin pasif yer değiştirme işi, kuvvetin, kendi tatbik noktasında ve doğrultunda başka bir kuvvetten meydana gelen yer değiştirme ile çarpımına eşittir.

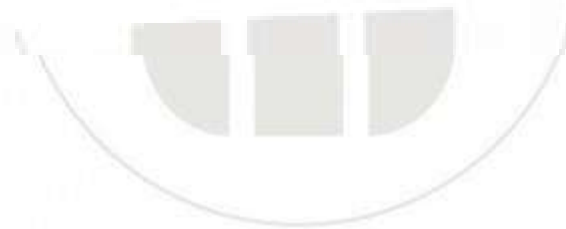


1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

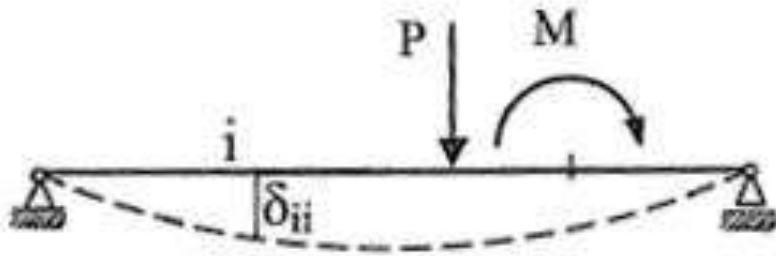
1.2.2.2 İç Kuvvetlerin Şekil Değiştirme İşi (İç İş)

1.2.2.2.1 Dolu gövdeli sistemler

Şekil değiştiren bir sistemde dış kuvvetler yer değiştirme ile iş yaparken iç kuvvetler de şekil değiştirme ile iş yapar, buna iç kuvvetlerin **şekil değiştirme işi** veya kısaca **iç iş** denir ve W_i ile gösterilir. Dış kuvvetlerin işinde olduğu gibi iç işi de yine aynı sebepten meydana gelen iç kuvvetlerle şekil değiştirmelerin yaptığı iş ve iç kuvvetlerin başka bir sebepten meydana gelen şekil değiştirmelerle yaptığı iş olarak incelemek gerekir. Aynı sebepten meydana gelen iç kuvvetle şekil değiştirmenin yaptığı işe **aktif iç iş** ve başka bir sebepten meydana gelen iç kuvvetin bir başka sebepten meydana gelen şekil değiştirme ile yaptığı işe **pasif iç iş** denir.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



Şekil 1.2.4

1.2.2.2.1.1 Aktif iç iş

Şekil 1.2.4'de gösterilen sistemi ele alalım. Burada sistemdeki P ve M kuvvetlerinden i kesitinde meydana gelen iç kuvvetler: eğilme momenti M_i , normal kuvvet N_i ve kesme kuvveti V_i ; Şekil değiştirmeler

birim dönme açısı (eğrilik) ω_i , $(\frac{d\phi_i}{dx})$, birim uzama şekil değiştirmesi ε_i , $(\frac{du_i}{dx})$

ve birim kayma şekil değiştirmesi γ_i , $(\frac{dv_i}{dx})$ 'dir. Bu değerlere göre birim boyda

meydana gelen şekil değiştirme işi

$$w_i = \int_0^{\omega_i} M_i d\omega_i + \int_0^{\varepsilon_i} N_i d\varepsilon_i + \int_0^{\gamma_i} V_i d\gamma_i \quad (1.2.10)$$

şeklinde yazılır.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Mukavemetten bilindiği ve 1.bölümde de verildiği gibi

$$M_i = EI\omega_i \quad ; \quad d\varphi_i = \frac{M_i}{EI} dx \quad (1.2.11a,b)$$

$$N_i = EA\varepsilon_i \quad ; \quad du_i = \frac{N_i}{EA} dx \quad (1.2.11c,d)$$

$$V_i = GA'\gamma_i \quad ; \quad dv_i = \frac{V_i}{GA'} dx \quad (1.2.11e,f)$$

dir. Kesit tesirlerinin bu değerleri (1.2.10) eşitliğinde yerine konur, sabit değerler integralin dışına alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$w_i = EI \int_0^{\omega_i} \omega_i d\omega_i + EA \int_0^{\varepsilon_i} \varepsilon_i d\varepsilon_i + GA' \int_0^{\gamma_i} \gamma_i d\gamma_i \quad (1.2.12)$$

bulunur.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bu integral işlemi yapılarak

$$w_i = \frac{1}{2}EI\omega^2 + \frac{1}{2}EA\varepsilon^2 + \frac{1}{2}GA'\gamma^2 \quad (1.2.13)$$

elde edilir. Birim şekil değiştirmeler yerine (1.2.11a,c ve d) eşitliklerindeki iç kuvvetlerle ilgili değerleri yerlerine konulursa

$$w_i = \frac{1}{2} \frac{M_i^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{N_i^2}{EA} + \frac{1}{2} \frac{V_i^2}{GA'} \quad (1.2.14)$$

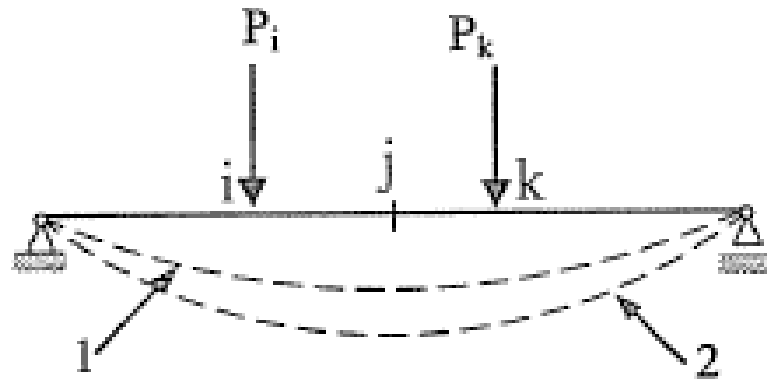
elde edilir. dx uzunluğundaki bir çubukta şekil değiştirme işi $w_i dx$ olur. L uzunluğundaki bir çubukta bu değerın çubuk boyunca integrali alınarak

$$W_i = \int_0^L w_i dx = \frac{1}{2} \int_0^L M_i^2 \frac{dx}{EI} + \frac{1}{2} \int_0^L N_i^2 \frac{dx}{EA} + \frac{1}{2} \int_0^L V_i^2 \frac{dx}{GA'} \quad (1.2.15)$$

şeklinde elde edilir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.2.2.1.2 Pasif iç iş



Şekil 1.2.5

Şekil 1.2.5'de gösterilen sistemde önce P_i kuvveti yüklensin. Bu yükten sistemde herhangi bir j kesitinde meydana gelen iç kuvvetler M_i , N_i ve V_i 'dir. Sisteme sonra da P_k kuvvetini yükleyelim. Herhangi bir j kesitinde bu kuvvetten meydana gelen iç kuvvetler M_k , N_k , V_k ve şekil değiştirme- ω_k , ε_k ve γ_k olur. Bu durumda yukarıda belirtilen P_i kuvvetinden meydana gelen iç

kuvvetlerle P_k kuvvetinden meydana gelen şekil değiştirmelerin yapmış olduğu işe **pasif iç iş** denir ve W_i^* ile gösterilir. Bu durumda çubuğun birim uzunluğunda meydana gelen iç iş

$$w_i^* = \int_0^{\omega_k} M_i d\omega_k + \int_0^{\varepsilon_k} N_i d\varepsilon_k + \int_0^{\gamma_k} V_i d\gamma_k \quad (1.2.16)$$

şeklinde yazılır.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Burada M_i , N_i ve V_i kesit tesirleri sabit terimler olduğundan integralin dışına alınır ve integral işlemi yapılırsa

$$w_i^* = M_i \omega_k + N_i \varepsilon_k + V_i \gamma_k \quad (1.2.17)$$

elde edilir. ω_k , ε_k ve γ_k birim şekil değiştirmeler yerine (1.2.11a,c,d) eşitliklerindeki iç kuvvetlerle ilgili değerleri yerlerine konulursa

$$w_i^* = M_i \frac{M_k}{EI} + N_i \frac{N_k}{EA} + V_i \frac{V_k}{GA'} \quad (1.2.18)$$

elde edilir. dx uzunluğundaki bir çubukta şekil değiştirme işi $w_i^* . dx$ olur. L uzunluğundaki bir çubukta bu değer çubuk boyunca integrali alınarak

$$W_i^* = \int_0^L w_i^* dx = \int_0^L M_i M_k \frac{dx}{EI} + \int_0^L N_i N_k \frac{dx}{EA} + \int_0^L V_i V_k \frac{dx}{GA'} \quad (1.2.19)$$

şeklinde elde edilir. Çok sayıda çubuktan oluşan sistemlerde integral işlemi tüm çubuklar üzerine yapılmalıdır.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bir sistemde herhangi bir kuvvet sistemi ile sıcaklık değişimleri, rötre, sünme, elastik mesnet şekil değişimleri ile yapılan işler pasif iç iştir. Sisteme etkiyen iki ayrı kuvvet sistemi, sıcaklık değişimleri, rötre, sünme ve elastik mesnet olması durumunda L uzunluklu bir çubukta toplam iç iş

$$W_i^* = \int_0^L M_i M_k \frac{dx}{EI} + \int_0^L N_i N_k \frac{dx}{EA} + \int_0^L V_i V_k \frac{dx}{GA}, \quad \text{İç kuvvetlerden}$$

$$+ \int_0^L M_i \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dx \quad \text{Farklı sıcaklık değişiminden}$$

$$+ \int_0^L N_i \alpha_t t dx \quad \text{Üniform sıcaklık değişiminden}$$

$$+ \int_0^L N_i (-\epsilon_R) dx \quad \text{Rötre tesirinden}$$

$$+ \int_0^L M_i \left(\varphi_s \frac{M_k}{EI} \right) dx + \int_0^L N_i \left(\varphi_s \frac{N_k}{EA} \right) dx \quad \text{Sünme tesirinden}$$

$$+ \sum M_{Li} \frac{M_{Lk}}{k\varphi_L} + \sum R_{Li} \frac{R_{Lk}}{k_{\Delta L}} \quad \text{Elastik mesnetlerden}$$

şeklinde bulunur. (1.2.20)

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bir sistemdeki toplam işi bulmak için sistemi oluşturan tüm çubuklardaki işler toplanır. Diğer bir anlatımla bu işlemler tüm çubuklar için yapılır ve cebirsel olarak toplanır.

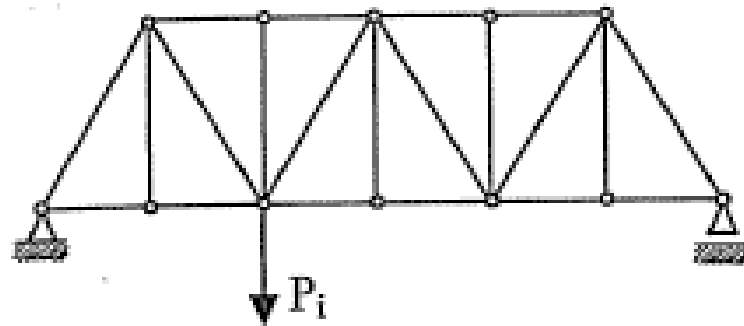
1.2.2.2.2 Kafes sistemler

Kafes sistemlerde düğüm noktaları mafsallı olduğundan çubuklarda eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfır olur ve bu durumda sadece normal kuvvetin işi söz konusu olacaktır. Bilindiği gibi kafes sistemlerde kuvvetler düğüm noktalarına etkidüğinden normal kuvvet çubuk boyunca sabittir.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.2.2.2.1 Aktif iç iş



N_{ni} : n çubuğunda P_i kuvvetinden meydana gelen normal kuvvet

Şekil 1.2.6 P_i kuvveti ile yüklü kafes kiriş

Şekil 1.2.6'da verilen kafes sistem P_i kuvveti ile yüklenmiştir. Bu yükten n çubuğunda meydana gelen normal kuvvet N_{ni} ve şekil değiştirme $\varepsilon_i = \frac{N_i}{EA}$ ve

$du_i = \frac{N_i}{EA} dx$ 'dir. Buna göre genel olarak herhangi bir çubukta birim boydaki şekil değiştirme işi

$$w_i = \int_0^{\varepsilon_i} N_i d\varepsilon_i \quad (1.2.21)$$

şeklinde yazılır.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

N_i yerine $\varepsilon_i EA$ konulur ve EA çubuk boyunca sabit olduğundan integralin dışına alınır ve integral işlemi yapılırsa

$$w_i = EA \int_0^{\varepsilon_i} \varepsilon_i d\varepsilon_i = \frac{1}{2} EA \varepsilon_i^2 \quad (1.2.22)$$

bulunur. ε yerine N cinsinden değeri konulursa bir n çubuğunda birim boydaki şekil değiştirme işi

$$w_i = \frac{1}{2} \frac{N_{ni}^2}{EA_n}$$

ve L uzunluklu n çubuğundaki şekil değiştirme işi

$$W_i = \int_0^{L_n} \frac{1}{2} \frac{N_{ni}^2}{EA_n} dx$$

şeklinde yazılır ve integral alınarak

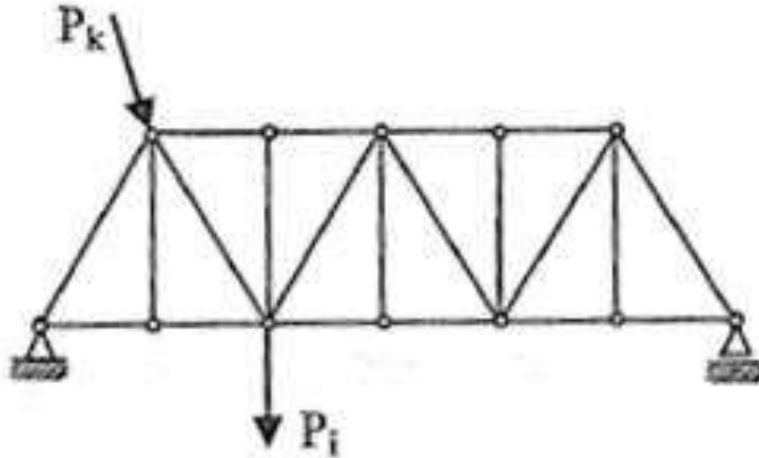
$$W_i = \frac{1}{2} N_{ni}^2 \frac{L_n}{EA_n} \quad \text{elde edilir.} \quad (1.2.23)$$

φ sayıda çubuğu olan bir kafes sistemde toplam iç iş

$$W_i = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\varphi} N_{ni}^2 \frac{L_n}{EA_n} \quad \text{şeklinde bulunur.}$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.2.2.2.2 Pasif iç iş



N_{ni} : n çubuğunda P_i kuvvetinden meydana gelen normal kuvvet
 N_{nk} : n çubuğunda P_k kuvvetinden meydana gelen normal kuvvet

Şekil 1.2.7 ayrı ayrı zamanlarda yüklenmiş P_i ve P_k kuvveti ile yüklü kafes kiriş.

Şekil 1.2.7'de görülen kafes sistemde önce P_i ve sonra P_k kuvveti yüklenmiştir. P_i kuvvetinden çubuklarda meydana gelen normal kuvvet N_i ve P_k kuvvetinden çubuklarda meydana gelen normal kuvvet N_k ve şekil değiştirme $(N_k / EA)dx$ 'dir. Bu durumda L uzunluğundaki bir çubukta yapılan iş

$$w_i^* = \int_0^{L_n} N_{ni} N_{nk} \frac{dx}{EA_n} \quad \text{yazılır.} \quad (1.2.25)$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

N ve EA değerleri çubuk boyunca sabit olduğundan integralin dışına alınır ve integral işlemi yapılırsa

$$w_i^* = N_{ni} N_{nk} \frac{L_n}{EA_n} \quad (1.2.26)$$

bulunur. $\checkmark$ sayıda çubuktan oluşan bir kafes sistemde toplam iç iş

$$W_i^* = \sum_{n=1}^{n=\checkmark} N_{ni} N_{nk} \frac{L_n}{EA_n} \quad (1.2.27)$$

şeklinde yazılır.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.3 Denge Şartı

Genel olarak bir sistemde, ısı enerjisi, titreşim enerjisi v.b gibi enerji kayıpları olmadığı durumlarda enerjinin korunması prensibinden dış kuvvetlerin yer değiştirme işinin, iç kuvvetlerin şekil değiştirme enerjisine dönüştüğü söylenebilir. Diğer bir anlatımla dengede olan bir sistemde dış kuvvetlerin yer değiştirme işi, iç kuvvetlerin şekil değiştirme işine eşittir. Buna göre bir sistemin dengede olabilmesi için

$$W_d = W_i \quad (1.2.28a)$$

ve

$$W_d^* = W_i^* \quad (1.2.28b)$$

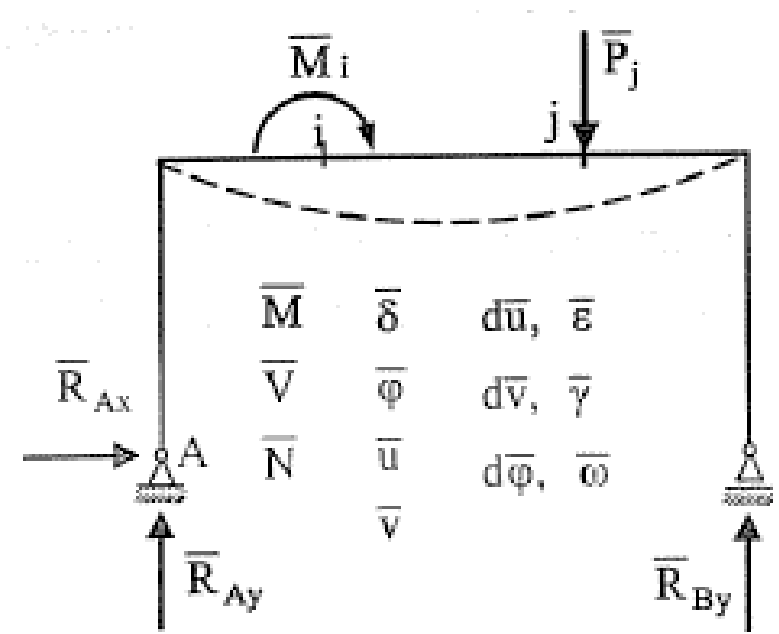
olmalıdır.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

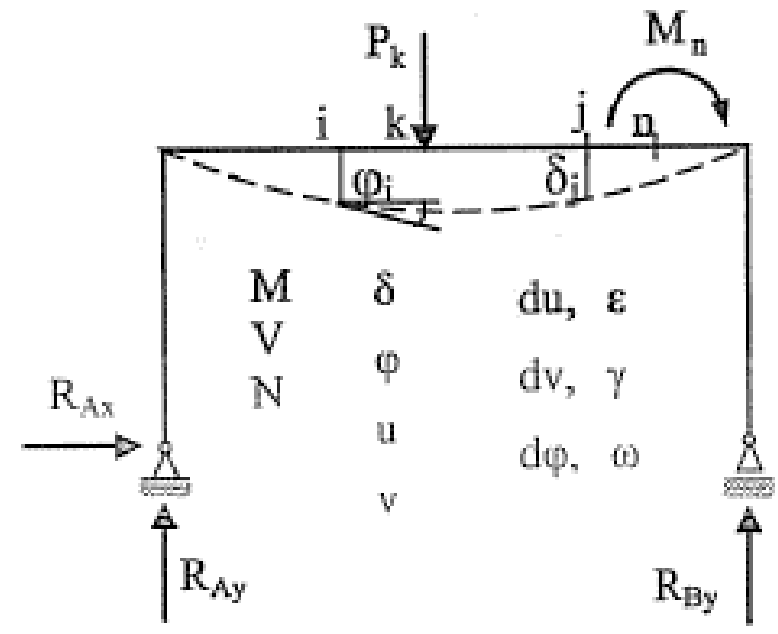
1.2.4 Virtüel İş Yöntemi

1.2.4.1 Virtüel Kuvvetler

Gerçekte var olmayan ancak var olması mümkün olan hayali ve kendi aralarında dengede olan keyfi kuvvetler sistemine “**virtüel kuvvetler sistemi**” denir. Virtüel dış kuvvetlerden meydana gelen iç kuvvetlere **virtüel iç kuvvet** denir. Genel olarak gerçek kuvvetlerden ayırt etmek için virtüel kuvvetler, iç kuvvetler, mesnet tepkileri, şekil ve yer değiştirmeler üzeri çizgili olarak gösterilir. ($\bar{M}, \bar{N}, \bar{V}, \bar{R}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\delta}, \bar{\varphi}, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}$) gibi.

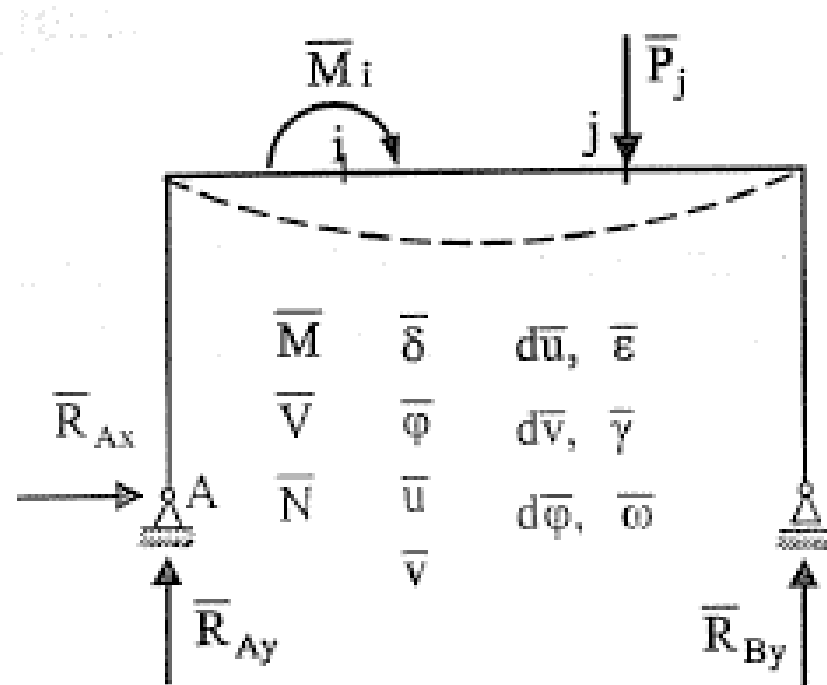


Şekil 1.2.8a Virtüel kuvvet sistemi

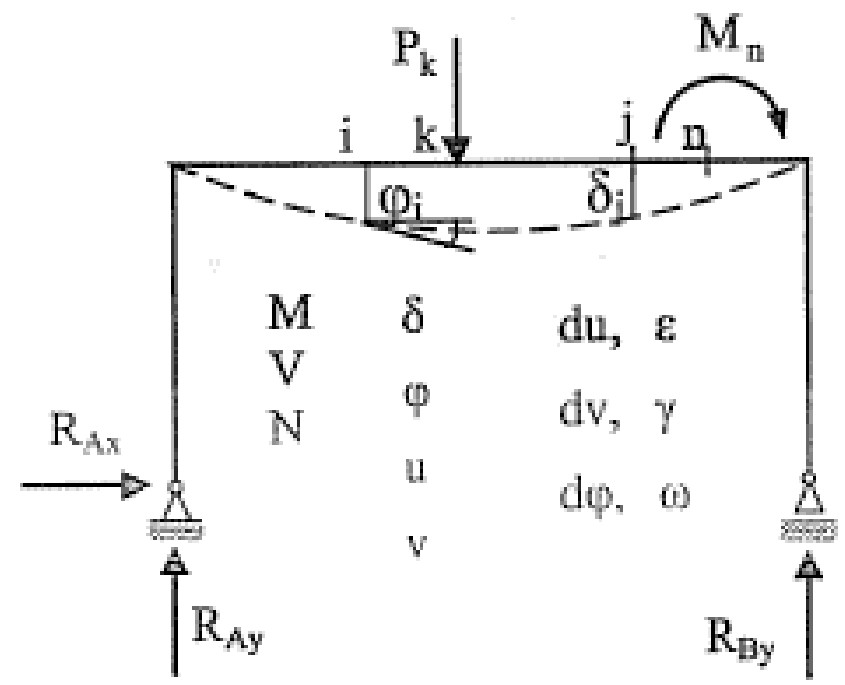


Şekil 1.2.8b Gerçek kuvvet sistemi

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



Şekil 1.2.8a Virtüel kuvvet sistemi



Şekil 1.2.8b Gerçek kuvvet sistemi

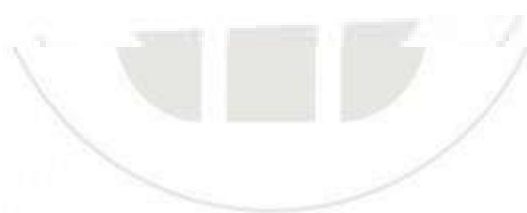
Şekil 1.2.8a'da virtüel kuvvetle yüklenmiş sistem ve mesnet tepkileri, kesit tesirleri, şekil ve yer değiştirmeler görülmektedir. Şekil 1.2.8b'de gerçek yükleme ve kesit tesirleri, mesnet tepkileri, şekil ve yer değiştirmeler gösterilmiştir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.4.2 Virtüel İş

1.2.4.2.1 Dolu Gövdeli Sistemler

Sistemlerin yer değiştirmelerini hesaplamak için belki de doğrudan, en kolay ve en uygun yöntem virtüel iş yöntemidir. Bu yöntem 1717’de John Bernoulli tarafından formüle edilen virtüel yer değiştirmeler prensibinin alternatif bir uygulamasıdır. Bir sistemde Şekil 1.2.8a’da gösterildiği gibi önce virtüel kuvvetler ve sonra Şekil 1.2.8b’de gösterildiği gibi gerçek kuvvetlerin etkidiği düşünülürse, virtüel dış kuvvetlerle gerçek yer değiştirmelerin yaptığı işe **virtüel dış iş** ve virtüel iç kuvvetlerle gerçek yüklerden meydana gelen şekil değiştirmelerin yaptığı işe de **virtüel iç iş** denir. Virtüel iş daha önce açıklanan pasif iş gibi hesaplanır. Ancak bunun yukarıda belirtildiği gibi düşüncede var olan bir kavram olduğu unutulmamalıdır.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.4.2.1.1 Virtüel dış iş

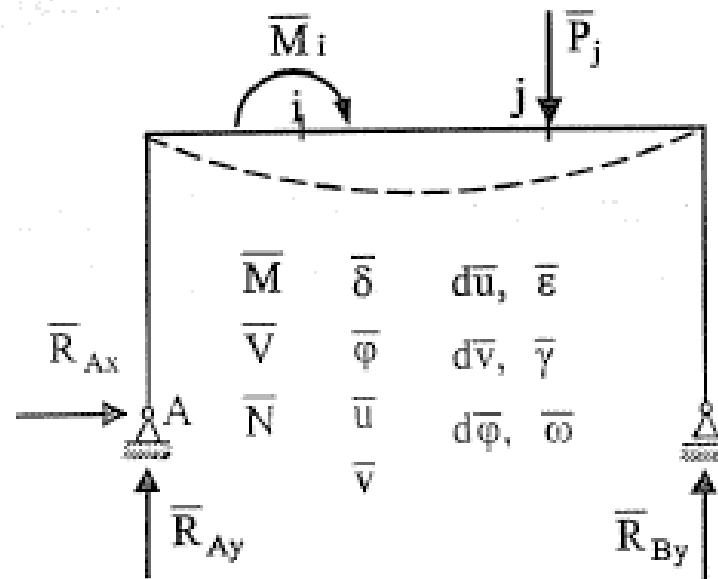
Şekil 1.2.8a'da gösterilen $\bar{P}_j$ ve $\bar{M}_i$ virtüel kuvvetleri ve Şekil 1.2.8b'de gösterilen gerçek yüklerden virtüel kuvvetler doğrultusunda ve yerinde meydana gelen yer değiştirmeler δ_j ve φ_i göz önüne alınarak virtüel dış iş

$$\bar{W}_d = \bar{P}_j \delta_j + \bar{M}_i \varphi_i \quad (1.2.29)$$

şeklinde yazılır. Sistemde birden çok kuvvetin olması durumunda sistemdeki toplam virtüel iş

$$\bar{W}_d = \sum \bar{P}_j \delta_j + \sum \bar{M}_i \varphi_i \quad (1.2.30)$$

olur.



Şekil 1.2.8a Virtüel kuvvet sistemi

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.4.2.1.2 Virtüel iç iş

Virtüel kuvvetlerden meydana gelen iç kuvvetler $(\bar{M}, \bar{N}, \bar{V})$ ile gerçek yüklemeden meydana gelen şekil değiştirmelerin $(d\phi, du, dv)$ yaptığı iç virtüel iş

$$\bar{W}_i = \int \bar{M}.d\phi + \int \bar{N}.du + \int \bar{V}.dv \quad (1.2.31)$$

olarak yazılır. Burada şekil değiştirmeler yerine (1.2.11b, d, f) eşitliklerindeki değerleri yerine konursa

$$\bar{W}_i = \int \bar{M}M \frac{dx}{EI} + \int \bar{N}N \frac{dx}{EA} + \int \bar{V}V \frac{dx}{GA'} \quad (1.2.32)$$

elde edilir. Bir cisme dengede olan virtüel kuvvet sistemi etkiliyorsa ve sistem verilen küçük yer değiştirmelerle de dengede kalıyorsa, (1.2.30) eşitliği ile verilen virtüel kuvvetlerin yer değiştirme işi (1.2.32) eşitliği ile verilen virtüel iç kuvvetlerin şekil değiştirme işine eşittir.

$$\bar{W}_d = \bar{W}_i \quad (1.2.33)$$

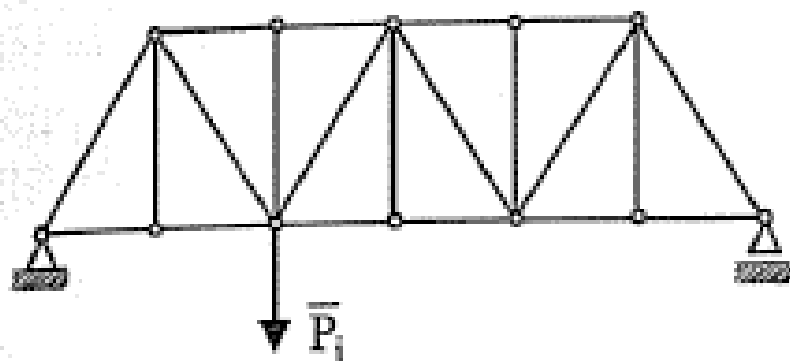
Bu virtüel işlerin (1.2.30) ve (1.2.32) eşitliklerindeki değerleri yerlerine konulursa

$$\sum \bar{P}_i \delta_i + \sum \bar{M}_i \phi_i = \int \bar{M}M \frac{dx}{EI} + \int \bar{N}N \frac{dx}{EA} + \int \bar{V}V \frac{dx}{GA'} \quad (1.2.34)$$

elde edilir.

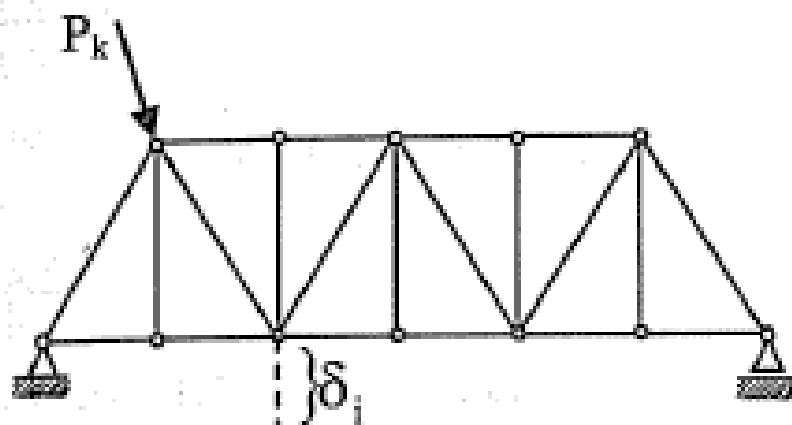
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.4.2.2 Kafes Sistemler



Şekil 1.2.9a Virtüel kuvvetle yüklü kafes kiriş

$\bar{N}_n$: n çubuğunda $\bar{P}_i$ virtüel kuvvetinden meydana gelen normal kuvvet
 N_{nk} : n çubuğunda P_k kuvvetinden meydana gelen normal kuvvet



Şekil 1.2.9b Gerçek P_k kuvveti ile yüklü kafes kiriş

N_n : n çubuğunda gerçek P_k kuvvetinden meydana gelen normal kuvvet
 δ_i : P_k gerçek yükünden i noktasında ve $\bar{P}_i$ 'nin doğrultusunda meydana gelen yer değiştirme

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.4.2.2.1 Virtüel dış iş

Kafes sistemlerde eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfırdır. Bu durumda iç kuvvetlerin şekil değiştirme işi sadece N normal kuvveti ile yapılacaktır. Şekil 1.2.9a'da virtüel yükleme ve Şekil 1.2.9b'de gerçek yükleme gösterilmiştir. Şekil 1.2.9b'de görüldüğü gibi δ_i , P_k gerçek yükünden $\bar{P}_i$ virtüel kuvvetinin tatbik noktası ve doğrultusunda meydana gelen yer değiştirmedir. Virtüel dış iş dolu gövdeli sistemlerde olduğu gibi

$$\bar{W}_d = \bar{P}_i \delta_i \quad (1.2.35)$$

ve birden çok virtüel kuvvetin etkimesi durumunda

$$\bar{W}_d = \sum \bar{P}_i \delta_i \quad (1.2.36)$$

biçiminde yazılır.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.4.2.2.2 Virtüel iç iş

Şekil 1.2.9a'da gösterilen virtüel yüklemeden n çubuğunda meydana gelen normal kuvvet $\bar{N}_n$ ve Şekil 1.2.9b'de gösterilen gerçek yüklemeden n çubuğunda meydana gelen normal kuvvet N_n 'dir. Virtüel yüklemedeki $\bar{N}$ normal kuvvetinin gerçek yüklemedeki $N \frac{dx}{EA}$ şekil değiştirmesi ile yaptığı bir L uzunluklu çubuktaki virtüel iç iş

$$\bar{W}_i = \int_0^L \bar{N} N \frac{dx}{EA} \tag{1.2.37}$$

olarak yazılır. n çubuğu için çubuk boyunca normal kuvvet ve alanın sabit olduğu göz önüne alınır integral işlemi yapılırsa

$$\bar{W}_i = \bar{N}_n N_n \frac{L_n}{EA_n} \quad \text{olarak yazılır.} \tag{1.2.38}$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

ζ sayıdaki bir kafes sistemde

$$\overline{W}_i = \sum_{n=1}^{n=\zeta} \overline{N}_n N_n \frac{L_n}{EA_n} \quad (1.2.39)$$

şeklinde elde edilir. İç kuvvetlerin işi dış kuvvetlerin işine eşit olduğundan

$$\overline{W}_d = \overline{W}_i \quad (1.2.40)$$

yazılır ve bunların (1.2.36) ve (1.2.39) eşitliklerindeki değerleri yerlerine konularak

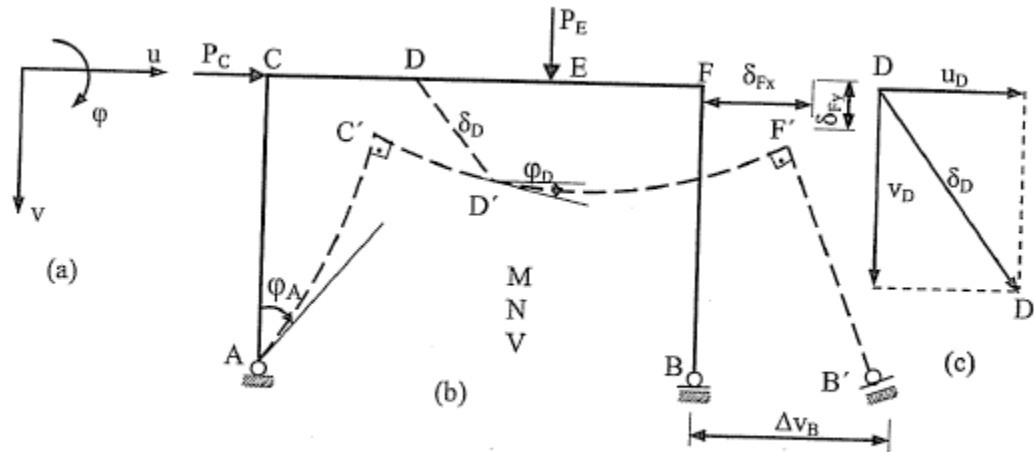
$$\sum \overline{P}_i \delta_i = \sum_{n=1}^{n=\zeta} \overline{N}_n N_n \frac{L_n}{EA_n} \quad (1.2.41)$$

elde edilir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.4.3 Virtüel İş Yöntemi ile Yer Değiştirme ve Dönmelerin Hesabı

Şekil 1.2.10b'de bir sistemin yüklenmeden önceki ve yüklendikten sonraki durumu gösterilmiştir. Görüldüğü gibi sistem yüklendikten sonra sistem üzerindeki noktalar yer değiştirmektedir. Örneğin C noktası C' noktasına, D noktası D' noktasına, F noktası F' noktasına ve B noktası B' noktasına gitmiştir. D noktası D' noktasına hareket ederken hem $DD' = \delta_D$ kadar hareket etmiş ve hem de çubuk ilk konumuna göre φ_D kadar dönmüştür. Genelde bu δ yer değiştirmesine ve φ dönme açısına yer değiştirme denir. Şekil 1.2.10c'de görüldüğü gibi δ_D yer değiştirmesi genel olup bu yer değiştirmenin çubuk eksenine doğrultusundaki bileşeni u_D ve çubuk eksenine dik doğrultudaki bileşeni v_D ile gösterilmiştir. Şekil 1.2.10a'da yer değiştirme ve dönmelerin (yer değiştirmelerin) yönleri gösterilmiştir.



Şekil 1.2.10 Sistemde yer değiştirme ve dönmeler

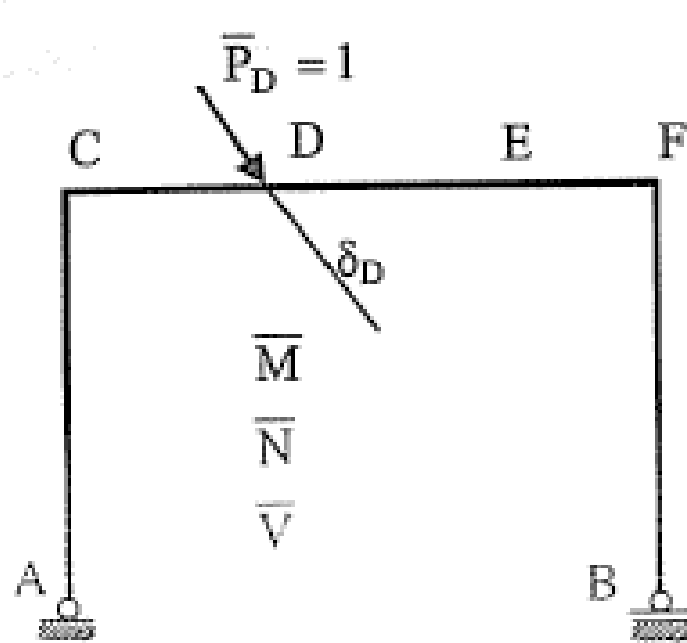
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.4.3.1-Virtüel iş eşitlikleri

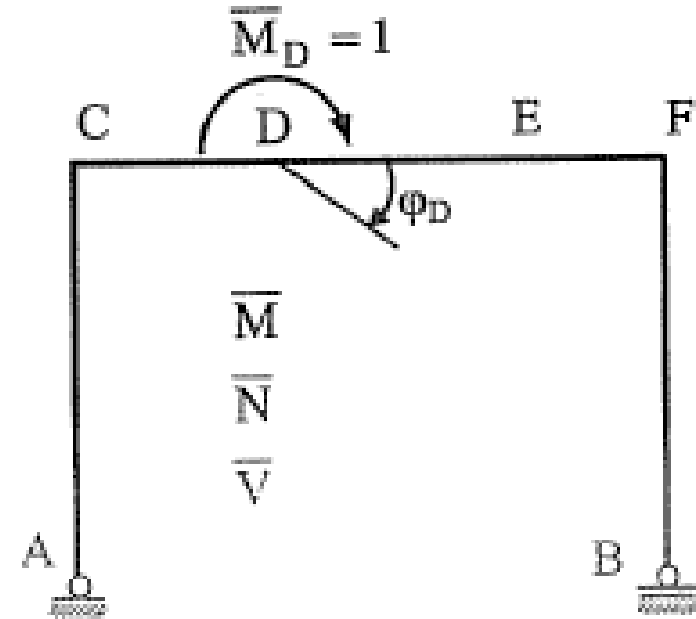
Dolu gövdeli veya kafes sistemlerde yer değiştirme ve dönmelerin hesabı için en çok kullanılan yöntemlerden biri virtüel kuvvetler prensibinden yararlanılarak yazılan “**virtüel iş eşitlikleri**”dir. Bu yöntemde hesaplanmak istenen yer değiştirmenin ve dönmenin bulunduğu noktada ve doğrultusunda virtüel kuvvet olarak 1 birimlik yükleme yapıp virtüel kuvvetler prensibi uygulanarak, aranılan yer değiştirme ve dönme açısı bulunur. Yer değiştirme hesaplanırken birim kuvvet ve dönme açısı hesaplanırken birim moment uygulanır.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



Şekil 1.2.11a δ_D yer değiştirmesini bulmak için yapılan birim yükleme



Şekil 1.2.11b ϕ_D dönme açısını bulmak için yapılan birim yükleme

Örneğin Şekil 1.2.10b'de D noktasındaki δ_D yer değiştirmesini hesaplamak için Şekil 1.2.11a'da görüldüğü gibi D noktasında ve DD'ne paralel $\bar{P}_D = 1$ kuvveti ve D noktasındaki ϕ_D dönme açısını hesaplamak için Şekil 1.2.11b'de görüldüğü gibi $\bar{M}_D = 1$ yüklemesi yapılmalıdır.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.4.3.1.1 Dolu gövdeli sistemler

Bir sistemde denge şart gereği virtüel dış kuvvetlerin işi iç kuvvetlerin işine eşit olduğundan

$$1.\delta_D = \int M\bar{M} \frac{dx}{EI} + \int N\bar{N} \frac{dx}{EA} + \int V\bar{V} \frac{dx}{GA'} \quad (1.2.42a)$$

ve

$$1.\varphi_D = \int M\bar{M} \frac{dx}{EI} + \int N\bar{N} \frac{dx}{EA} + \int V\bar{V} \frac{dx}{GA'} \quad (1.2.42b)$$



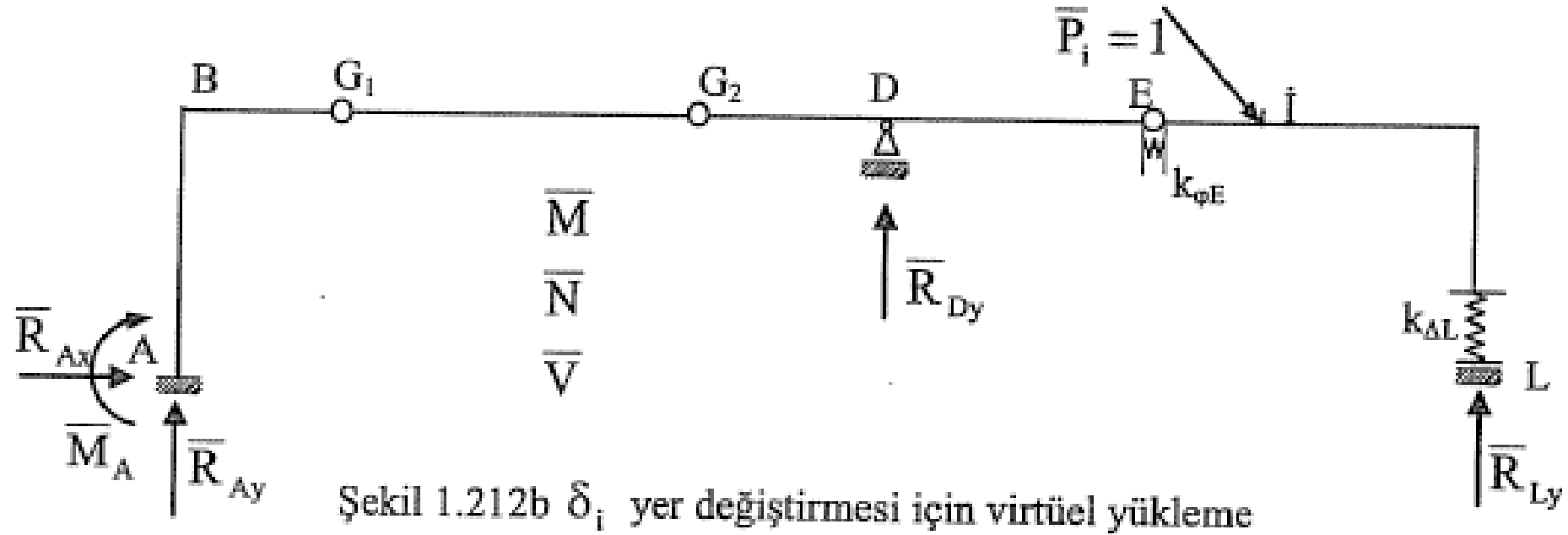
eşitlikleri yazılır ve bu eşitliklerden δ_D ve φ_D doğrudan hesaplanır. Bu eşitliklere **virtüel iş eşitlikleri** denir. Burada eşitliğin sağ tarafında bulunan M , N ve V gibi sisteme etkiyen yüklerden meydana gelen kesit tesirleri, $\bar{M}$, $\bar{N}$, $\bar{V}$ gibi birim virtüel yüklemeden meydana gelen virtüel kesit tesirleri, A , I ve k gibi çubukların enkesitlerinin geometrisi ve E , G , α_t , ε_R , φ_s , k_A , k_φ malzemelerin fiziksel özellikleri bilindiğinden sol taraftaki δ_D ve φ_D değerleri kolaylıkla hesaplanır.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Sistemde, sıcaklık değişimi, mesnet hareketleri v.b gibi diğer yüklerin bulunması durumunda bunlarla ilgili virtüel dış iş ve virtüel iç iş terimlerini de göz önüne almak gerekir. Sıcaklık değişimi, rötre, sünme, yapım hataları ve elastik mesnetler izostatik sistemde sadece şekil değişikliğine sebep olduklarından virtüel kuvvetler bu yüklerden meydana gelen şekil değiştirmelerle virtüel iç iş yapar. Bunlarla ilgili terimlerde eşitliklerin sağ tarafına ilave edilir. Mesnet hareketlerinde ise virtüel yüklemedeki virtüel mesnet tepkileri mesnet hareketleri ile virtüel dış iş yapar. Bunlarla ilgili terimlerde dış işi gösteren eşitliğin sol tarafına ilave edilir. Değerleri hesaplanabilen terimler olduğundan eksi işaretle eşitliğin sağ tarafına geçirilir ve δ_D ve ϕ_D sol tarafta yalnız bırakılır.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



Şekil 1.212b δ_i yer değiştirmesi için virtüel yükleme

Sonra Şekil 1.2.12b'de görüldüğü gibi δ_i 'nin meydana geldiği $\bar{I}$ noktasına $\bar{I} \bar{I}'$ 'ne paralel $\bar{P} = 1$ olan bir virtüel yükleme yapılır ve bundan meydana gelen mesnet tepkileri ve kesit tesirleri hesaplanır.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Sistemde virtüel kuvvetlerin dış işi virtüel kuvvetlerin iç işine eşit olması şartı yazılarak

$$\bar{M}_A \Delta \varphi_A + \bar{R}_{Dy} \Delta v_D + 1 \cdot \delta_i = \int \bar{M} M \frac{dx}{EI} + \int \bar{N} N \frac{dx}{EA} + \int \bar{V} V \frac{dx}{GA'} + \bar{M}_E \frac{M_E}{k_{\varphi E}} + \bar{R}_{LY} \frac{R_{Ly}}{k_{\Delta L}} \quad (1.2.43a)$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafındaki bilinen değerler sağ tarafa alınarak

$$\delta_i = \int \bar{M} M \frac{dx}{EI} + \int \bar{N} N \frac{dx}{EA} + \int \bar{V} V \frac{dx}{GA'} + \bar{M}_E \frac{M_E}{k_{\varphi E}} + \bar{R}_{LY} \frac{R_{Ly}}{k_{\Delta L}} - \bar{M}_A \Delta \varphi_A - \bar{R}_{Dy} \Delta v_D \quad (1.2.43b)$$

bulunur.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bir sistemde tüm yüklerin ve mesnet şartları değişiminin bulunması durumunda her hangi bir i noktasındaki δ_i yer değiştirmesi ve φ_i dönme açısı şu şekilde yazılır:

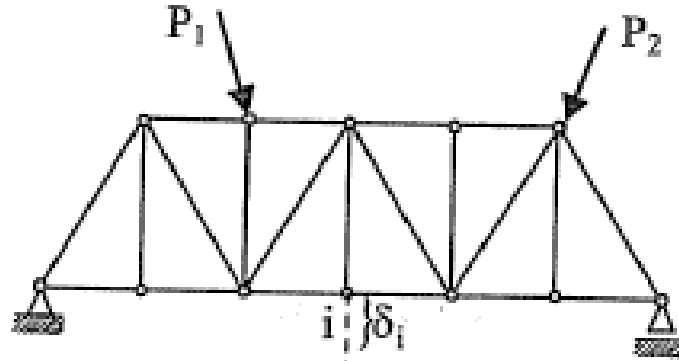
$$\left. \begin{array}{l} \delta_i \\ \varphi_i \end{array} \right\} = \int \overline{M} M \frac{dx}{EI} + \int \overline{N} N \frac{dx}{EA} + \int \overline{V} V \frac{dx}{GA'} \quad \text{İç kuvvetlerden}$$
$$+ \int \overline{M} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dx \quad \text{Farklı sıcaklık değişiminden}$$
$$+ \int \overline{N} \alpha_t t \cdot dx \quad \text{Üniform sıcaklık değişiminden}$$
$$+ \int \overline{N} (-\varepsilon_R) dx \quad \text{Rötre den}$$
$$+ \int \overline{M} \varphi_s M \frac{dx}{EI} + \int \overline{N} \varphi_s N \frac{dx}{EA} + \int \overline{V} \varphi_s V \frac{dx}{GA'} \quad \text{Sünmeden}$$
$$+ \sum \overline{M}_L \frac{M_L}{k_{\varphi L}} + \sum \overline{R}_L \frac{R_L}{k_{\Delta L}} \quad \text{Elastik mesnetlerden}$$
$$+ \sum \overline{M}_m \Delta \varphi_m + \sum \overline{N}_m \Delta u_m + \sum \overline{V}_m \Delta v_m \quad \text{Yapım hatalarında}$$
$$- \left\{ \sum \overline{M}_L \Delta \varphi_L + \sum \overline{R}_{Ly} \Delta v_L + \sum \overline{R}_{Lx} \Delta u_L \right\} \quad \text{Mesnet hareketlerinden}$$

(1.2.44)

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

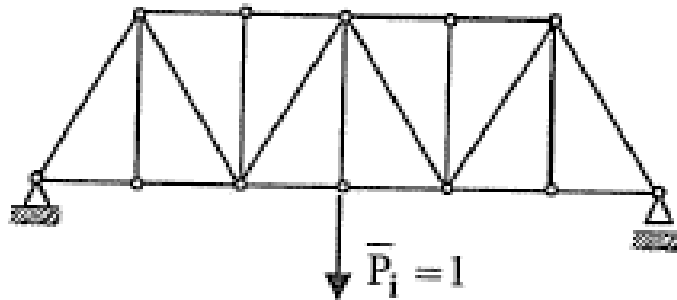
1.2.4.3.1.2 Kafes sistemler

Şekil 1.2.13a'da verilen kafes sistemdeki i noktasının düşey yer değiştirmesini hesaplayalım. Bilindiği gibi kafes sistemlerde M eğilme momenti ve V kesme kuvveti sıfırdır. Sadece N normal kuvvetlerin şekil değiştirmesi söz konusudur. Genel olarak kafes sistemlerde rötre ve sünme göz ardı edilebilir. Farklı sıcaklık değişimi de söz konusu değildir.



N_n : n çubuğunda gerçek P dış kuvvetlerinden meydana gelen normal kuvvet
 δ_i : hesaplanması istenen i noktasındaki düşey yer değiştirme

Şekil 1.2.13a Gerçek P kuvvetleri ile yüklü kafes kiriş



$\bar{N}_n$: n çubuğunda $\bar{P}_i = 1$ virtüel kuvvetinden meydana gelen normal kuvvet

Şekil 1.2.13b Virtüel kuvvetle yüklü kafes kiriş

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bunun için önce sistemde dış yüklerden meydana gelen mesnet tepkileri ve N_n çubuk kuvvetleri hesaplanır. Sonra i düğüm noktasına düşey ve aşağı doğru $\bar{P}_i = 1$ yüklenir. Bu yükten meydana gelen mesnet tepkileri ve $\bar{N}_n$ çubuk kuvvetleri hesaplanır. Bu değerlere göre virtüel iş eşitliği yazılarak δ_i aşağıdaki gibi bulunur.

$$\delta_i = \sum_{n=1}^{n=\zeta} \bar{N}_n N_n \frac{L_n}{EA_n}$$

İç kuvvetlerden

$$+ \sum_{n=1}^{n=\zeta} \bar{N}_n \alpha_t t.L_n$$

Üniform sıcaklık değişiminden

$$+ \sum \bar{N}_m \Delta u_m$$

Yapım hatalarından

$$+ \sum \bar{R}_L \frac{R_L}{k_{\Delta L}}$$

Elastik mesnetlerden

$$- \left\{ \sum \bar{R}_{Ly} \Delta v_L + \sum \bar{R}_{Lx} \Delta u_L \right\}$$

Mesnet hareketlerinden (1.2.45)

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.4.3.2 Virtüel iş yöntemi ile yer değiştirme ve dönmelerin hesabından izlenecek yol

1.2.4.3.2.1 Dolu gövdeli sistemlerde

1. Sistemde gerçek yüklemelerden meydana gelen M , V ve N kesit tesirleri hesaplanır ve diyagramları çizilir

2. Yer değiştirmeyi hesaplamak için yer değiştirmenin tatbik noktasında ve doğrultusunda $\bar{P}=1$, dönme açısını hesaplamak için dönmenin bulunduğu noktada ve doğrultusunda $\bar{M}=1$ yüklemesi yapılır ve bu yüklemelerden meydana gelen $\bar{M}$, $\bar{N}$, $\bar{V}$ kesit tesirleri hesaplanır ve diyagramları çizilir.

3. Sistemdeki her çubuk ve sistemin tümü için

$$\int \bar{M}M \frac{dx}{EI}, \int \bar{N}N \frac{dx}{EA} \text{ ve } \int \bar{V}V \frac{dx}{GA'}$$

integral değerleri hesaplanır.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bu integral değerlerindeki her iki değişkenin değerleri yazılıp çarpımlarının integralleri alınabileceği gibi bazı değişim kuralları belirli şekiller için integral çarpımları formüller ile de verilebilir. Atalet momenti ve alanların sabit olması durumunda EI, EA ve GA' integralin dışına alınarak

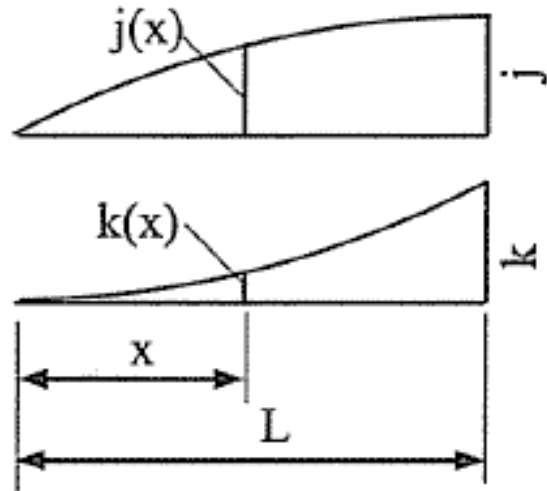
$$\frac{1}{EI} \int \overline{M}M dx, \quad \frac{1}{EA} \int \overline{N}N dx \quad \text{ve} \quad \frac{1}{GA'} \int \overline{V}V dx$$

şeklinde yazılır. İntegral çarpım İÇ değerleri hesaplanır ve sonra İÇ, $1/EI$, $1/EA$ veya $1/GA'$ değerleri ile çarpılarak sonuç değerler $\frac{1}{EI} \text{ İÇ}$, $\frac{1}{EA} \text{ İÇ}$ veya $\frac{1}{GA'} \text{ İÇ}$ bulunur.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Şekil 1.2.16'da gösterilen ve değişimi $j(x) = j(2Lx - x^2)/L^2$ olan bir dışbükey ikinci derece parabol ile $k(x) = k.x^2 / L^2$ olan bir iç bükey ikinci derece parabol şeklin integral çarpım değerini bulalım.



Şekil 1.2.16

$$\dot{I\!C} = \int_0^L j(x)k(x)dx \quad (1.2.57)$$

yazılır ve burada $j(x)$ ve $k(x)$ in değerleri yerine konulur

$$\dot{I\!C} = \int_0^L \frac{j}{L^2} (2Lx - x^2) \frac{k}{L^2} x^2 dx$$

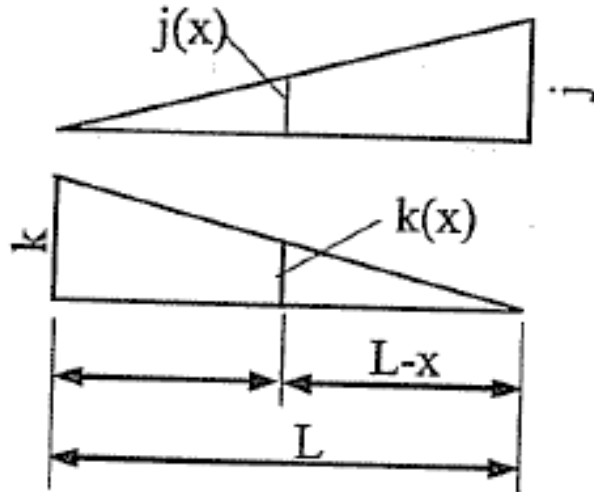
ve sabit terimler integralin dışına alınır

$$\dot{I\!C} = \frac{j.k}{L^4} \int_0^L (2Lx^3 - x^4) dx \quad \text{şeklinde yazılır.}$$

İntegral işlemi yapılarak $\dot{I\!C} = \frac{3}{10} jkL$ bulunur.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Benzer şekilde değişimi $j(x)=j \cdot x/L$ ve $k(x)=k(L-x)/L$ olan ve Şekil 1.2.17'de gösterilen iki üçgen şeklin integral çarpımı



Şekil 1.2.17

$$İÇ = \int_0^L \frac{j \cdot x}{L} \times \frac{k(L-x)}{L} dx$$

şeklinde yazılır. Sabit terimler integralin dışına alınarak

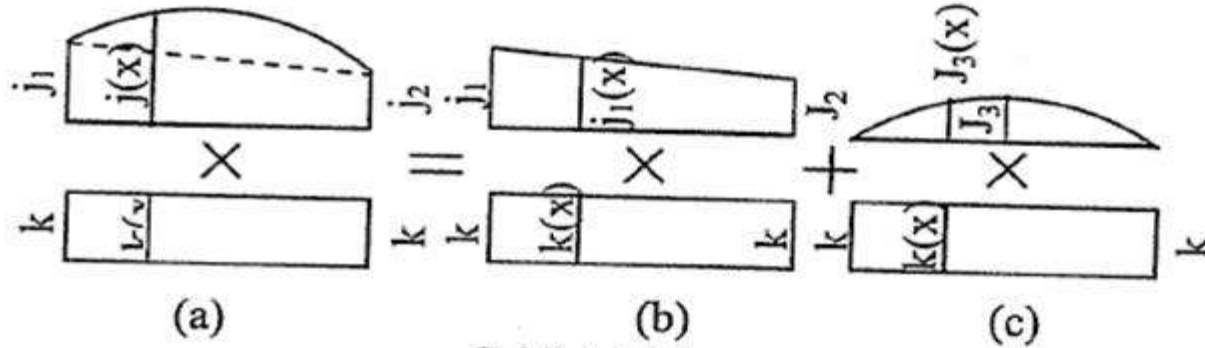
$$İÇ = \frac{jk}{L^2} \int_0^L (Lx - x^2) dx$$

ve integral işlemi yapılarak

$$İÇ = \frac{jkL}{6} \text{ bulunur.} \quad (1.2.59)$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Bu integral çarpımları (İÇ) bazı şekiller için hesaplanarak Çizelge 1.2.1'de verilmiştir. Çizelgede  biçimindeki trapeze ait çarpım değerleri verilmiştir.  Biçimindeki trapez şekiller için verilmemiştir. Bunun için uçlardaki ordinatlar işaretleri göz önüne alınarak birinci şekilden yararlanılarak bulunur. Çizelgede bulunmayan diğer bazı şekillerin integral çarpımı belirli şekillerin süperpozisyonu ile bulunabilir.



Şekil 1.2.18

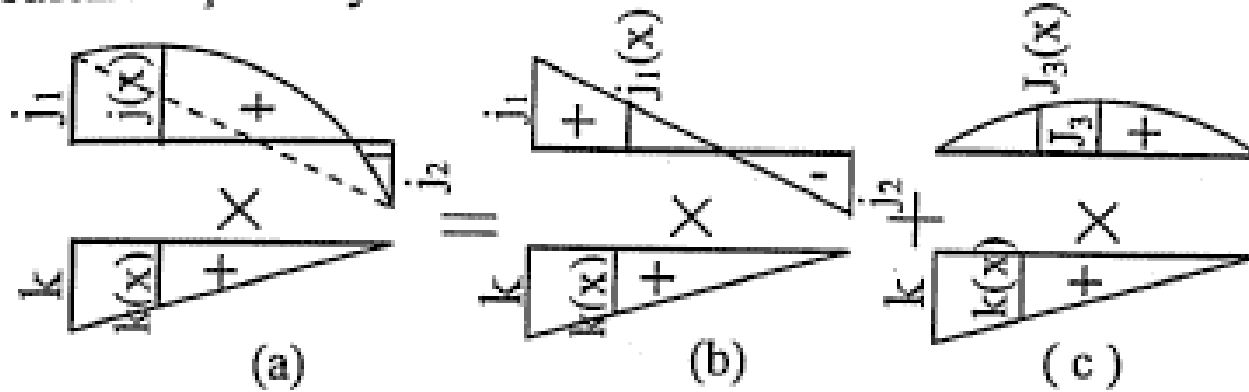
Şekil 1.2.18a'da görülen $j(x)$ değişimli şekil çizelgede yoktur. Bu şekil Şekil 1.2.18b'deki $j_1(x)$ değişimli şekil ile Şekil 1.2.18c'deki $j_3(x)$ değişimli şeklin toplamına eşittir. Bu durumda

$$\int j(x)k(x)dx = \int j_1(x)k(x)dx + \int j_3(x)k(x)dx \quad \text{olur.} \quad (1.2.60)$$

Diğer bir anlatımla Şekil 1.2.18a'daki iki şeklin integral çarpımı, Şekil 1.2.18b'deki iki şeklin ve Şekil 1.2.18c'deki iki şeklin çarpımının toplamına eşit olur.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Şekil 1.12.19a'da üstteki şekil de Şekil 1.2.19b ve Şekil 1.2.19c'nin üstünde görülen iki şekle ayrılabilir.



Şekil 1. 2.19

Değişken kesitli çubuklar için simetrik değişken ve tek uçta değişken olması durumları için Çizelge 1.2.2'de

$$\dot{I}\dot{C} = \int \frac{I_0}{I_k} M_i M_k dx \quad (1.2.61)$$

değerleri verilmiştir.

4. Sistemde sıcaklık değişimi, rötre, sünme gibi tesirlerle elastik mesnetlerin ve mesnet hareketlerinin bulunması durumunda virtüel iş eşitliğinde bunların sayısal değerleri konur. Bunlar o sayısal değerde dikdörtgen şekilmiş gibi düşünülerek yine çarpım çizelgesinden yararlanılarak bulunur.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

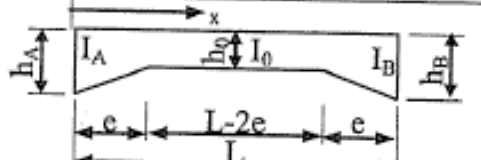
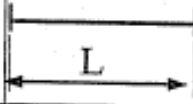
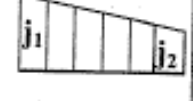
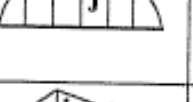
YAPI SİSTEMLERİNDE YER DEĞİŞTİRMELER

Çizelge 1.2.1 $\dot{I}\dot{C} = \int j(x)k(x)dx$ İntegral Çarpım Değerleri

1		$j k L$	$j k L / 2$	$j k L / 2$	$j(k_1 + k_2)L / 2$	$2 j k L / 3$	$2 j k L / 3$	$j k L / 3$
2		$j k L / 2$	$j k L / 3$	$j k L (1 + \delta) / 6$	$j(2k_1 + k_2)L / 6$	$j k L / 3$	$5 j k L / 12$	$j k L / 4$
3		$j k L / 2$	$j k L / 6$	$j k L (1 + \gamma) / 6$	$j(k_1 + 2k_2)L / 6$	$j k L / 3$	$j k L / 4$	$j k L / 12$
4		$\frac{1}{2} j k L$	$\frac{1}{6} j k L (1 + \beta)$	$\frac{j k L}{6 \alpha \delta} [2\alpha - \alpha^2 - \gamma^2]$ $a \geq c$ $a = c$ ise $j k L / 3$	$\frac{j L}{6} [k_1(1 + \beta) + k_2(1 + \alpha)]$	$\frac{j k L}{3} (1 + \alpha \beta)$	$\frac{j k L}{12} (5 - \alpha - \alpha^2)$	$\frac{j k L}{12} (1 + \beta + \beta^2)$
5		$\frac{k L}{2} (j_1 + j_2)$	$\frac{k L}{6} (2j_1 + j_2)$	$\frac{k L}{6} [j_1(1 + \delta) + j_2(1 + \gamma)]$	$\frac{L}{6} [j_1(2k_1 + k_2) + j_2(k_1 + 2k_2)]$	$\frac{k L}{3} (j_1 + j_2)$	$\frac{k L}{12} (5j_1 + 3j_2)$	$\frac{k L}{12} (3j_1 + j_2)$
6		$2 j k L / 3$	$j k L / 3$	$(1 + \gamma \delta) j k L / 3$	$j(k_1 + k_2)L / 3$	$8 j k L / 15$	$7 j k L / 15$	$j k L / 5$
7		$2 j k L / 3$	$5 j k L / 12$	$(5 - \gamma - \gamma^2) j k L / 12$	$j(5k_1 + 3k_2)L / 12$	$7 j k L / 15$	$8 j k L / 15$	$3 j k L / 10$
8		$2 j k L / 3$	$j k L / 4$	$(5 - \delta - \delta^2) j k L / 12$	$j(3k_1 + 5k_2)L / 12$	$7 j k L / 15$	$11 j k L / 30$	$2 j k L / 15$
9		$j k L / 3$	$j k L / 4$	$(1 + \delta + \delta^2) j k L / 12$	$j(3k_1 + k_2)L / 12$	$j k L / 5$	$3 j k L / 10$	$j k L / 5$
10		$j k L / 3$	$j k L / 12$	$(1 + \gamma + \gamma^2) j k L / 12$	$j(k_1 + 3k_2)L / 12$	$j k L / 5$	$2 j k L / 15$	$j k L / 30$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

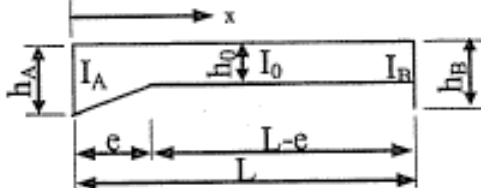
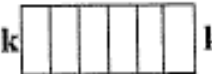
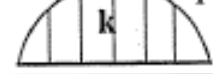
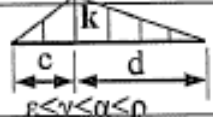
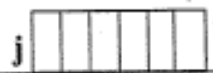
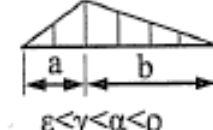
Çizelge 1.2.2 Değişken Atalet Momentli Simetrik Kesitli Çubuklarda $I_C = \int_{I_A}^{I_B} j(x)k(x)dx$ İntegral Çarpım Değerleri

			$n = I_0/I_A = I_0/I_B$ $m = 1-n$ $I_0/I = 1-m(e-x)/e$	$\varepsilon = e/L$ $\rho = (L-e)/L = 1-\varepsilon$	$\alpha = a/L$ $\beta = b/L$	$\gamma = c/L$ $\delta = d/L$
		$jkL(1-m\varepsilon)$	$\frac{1}{2}jkL(1-m\varepsilon)$	$\frac{jL}{2}(k_1+k_2)(1-m\varepsilon)$	$\frac{2}{3}jkL(1-m\varepsilon^2(2-\varepsilon))$	$\frac{1}{12}jkL(6-\frac{2m\varepsilon^2}{\gamma-\gamma^2})$
1		$\frac{jkL}{2}(1-m\varepsilon)$	$\frac{jkL}{6}[2-m\varepsilon(2+\rho^2)]$	$\frac{jL}{6}\{k_1[2-m\varepsilon(2+\rho^2)] + k_2[1-m\varepsilon^2(2-\alpha)]\}$	$\frac{1}{3}jkL[1-m\varepsilon^2(2-\varepsilon)]$	$\frac{1}{12}jkL[2(1+\delta) - m\frac{\varepsilon^2(\varepsilon+2\rho\delta)}{\gamma-\gamma^2}]$
2		$\frac{jkL}{2}(1-m\varepsilon)$	$\frac{jkL}{6}[1-m\varepsilon^2(2-\varepsilon)]$	$\frac{jL}{6}\{k_2[2-m\varepsilon(2+\rho^2)] + k_1[1-m\varepsilon^2(2-\alpha)]\}$	$\frac{1}{3}jkL[1-m\varepsilon^2(2-\varepsilon)]$	$\frac{1}{12}jkL[2(1+\gamma) - \frac{m\varepsilon^2(\varepsilon+2\rho\gamma)}{\delta-\delta^2}]$
3		$\frac{kL}{2}(j_1+j_2)(1-m\varepsilon)$	$\frac{kL}{6}\{j_1[2-m\varepsilon(2+\rho^2)] + j_2[1-m\varepsilon^2(2-\alpha)]\}$	$\frac{L}{6}\{(j_1k_1+j_2k_2)[2-m\varepsilon(2+\rho^2)] + (j_1k_2+j_2k_1)[1-m\varepsilon^2(2-\alpha)]\}$	$\frac{kL}{3}(j_1+j_2)[1-m\varepsilon^2(2-\alpha)]$	$\frac{kL}{12}\{2(1+\delta)j_1+2(1+\gamma)j_2 - m\varepsilon^2[\frac{\varepsilon+2\rho\delta}{\gamma-\gamma^2}j_1+\frac{\varepsilon+2\rho\gamma}{\delta-\delta^2}j_2]\}$
4		$\frac{2jkL}{3}(1-m\varepsilon^2(2-\varepsilon))$	$\frac{jkL}{3}[1-m\varepsilon^2(2-\varepsilon)]$	$\frac{jL}{3}(k_1+k_2)[1-m\varepsilon^2(2-\alpha)]$	$\frac{8}{15}jkL[1-m\varepsilon^3(5-6\varepsilon+2\varepsilon^2)]$	$\frac{jkL}{15}[5(1+\gamma+\gamma^2) - \frac{m\varepsilon^3(5-3\varepsilon)}{\gamma-\gamma^2}]$
5		$\frac{jkL}{12}(6-m\frac{2\varepsilon^2}{\alpha-\alpha^2})$	$\frac{jkL}{12}[2(1+\beta) - \frac{m\varepsilon^2(\varepsilon+2\rho\beta)}{\alpha-\alpha^2}]$	$\frac{jL}{12}\{2(1+\beta)k_1+2(1+\alpha)k_2 - m\varepsilon^2[\frac{\varepsilon+2\rho\beta}{\alpha-\alpha^2}k_1+\frac{\varepsilon+2\rho\alpha}{\beta-\beta^2}k_2]\}$	$\frac{jkL}{15}[5(1+\alpha-\alpha^2) - \frac{m\varepsilon^3(5-3\varepsilon)}{\alpha-\alpha^2}]$	$\frac{jkL}{12\alpha\delta}[2(2\alpha-\alpha^2-\gamma^2) - m\varepsilon^2(\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\alpha}{\beta})]$
6						

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

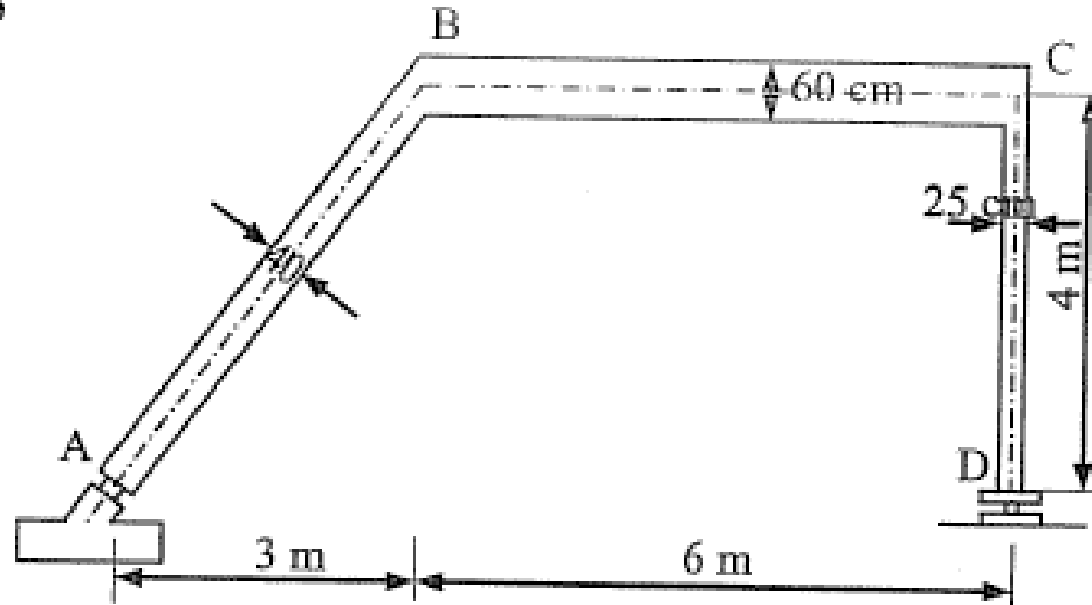
YAPI SİSTEMLERİNDE YER DEĞİŞTİRMELER

Çizelge 1.2.3 Bir Ucu Değişken Atalet Momentli Çubuklarda $I_C = \int_{I_x} \frac{I_0}{j(x)} k(x) dx$ İntegral Çarpım Değerleri

 $h_B = h_0$ $I_B = I_0$ $n = I_0 / I_A$ $m = 1 - n$ $I_0 / I = 1 - m(e-x)/e$ $\varepsilon = e/L$ $\rho = (L-e)/L = 1 - \varepsilon$ $\alpha = a/L$ $\beta = b/L$ $\gamma = c/L$ $\delta = d/L$						
						
1		$jkL(1 - \frac{m\varepsilon}{2})$	$\frac{1}{6}jkL[3 - m\varepsilon(3 - \varepsilon)]$	$\frac{jkL}{2}(1 - m\varepsilon)$	$\frac{jkL}{3}[2 - m\varepsilon^2(2 - \varepsilon)]$	$\frac{jkL}{2}(1 - \frac{1}{3\gamma}m\varepsilon^2)$
2		$\frac{1}{6}jkL[3 - m\varepsilon(3 - \varepsilon)]$	$\frac{jkL}{12}[4 - m\varepsilon(2 + (2 - \varepsilon)^2)]$	$\frac{jkL}{12}[2 - m\varepsilon^2(2 - \varepsilon)]$	$\frac{jkL}{15}[5 - m\varepsilon^2(10\rho + 3\varepsilon^2)]$	$\frac{1}{12}jkL[2(1 + \delta) - m\frac{\varepsilon^2}{\gamma}(2 - \varepsilon)]$
3		$\frac{jkL}{2}(1 - m\varepsilon)$	$\frac{jkL}{12}[2 - m\varepsilon^2(2 - \varepsilon)]$	$\frac{jkL}{12}(4 - m\varepsilon^3)$	$\frac{jkL}{15}[5 - m\varepsilon^3(5 - 3\varepsilon)]$	$\frac{1}{12}jkL[2(1 + \gamma) - m\varepsilon^3/\gamma]$
4		$\frac{jkL}{3}[2 - m\varepsilon^2(2 - \varepsilon)]$	$\frac{jkL}{15}[5 - m\varepsilon^2(10\rho + 3\varepsilon^2)]$	$\frac{jkL}{15}[5 - m\varepsilon^3(5 - 3\varepsilon)]$	$\frac{4}{15}jkL[2 - m\varepsilon^3(5 - 6\varepsilon + 2\varepsilon^2)]$	$\frac{jkL}{15}[5(1 + \gamma - \gamma^2) - m\varepsilon^3(5 - 3\varepsilon)]$
5		$\frac{jkL}{2}(1 - \frac{1}{3\alpha}m\varepsilon^2)$	$\frac{jkL}{12}[2(1 + \beta) - \frac{m\varepsilon^2(2 - \varepsilon)}{\alpha}]$	$\frac{1}{12}jkL[2(1 + \alpha) - m\varepsilon^3/\alpha]$	$\frac{jkL}{15}[5(1 + \alpha - \alpha^2) - \frac{m\varepsilon^3(5 - 3\varepsilon)}{\alpha}]$	$\frac{jkL}{12\alpha\delta}[(2\alpha\gamma\alpha^2 - \gamma^2) - m\varepsilon^3(\delta/\gamma)]$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Örnek 1.2.3

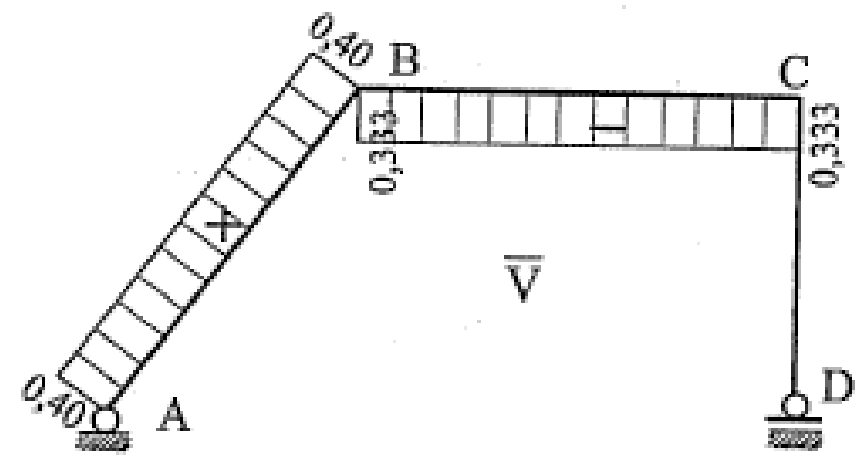
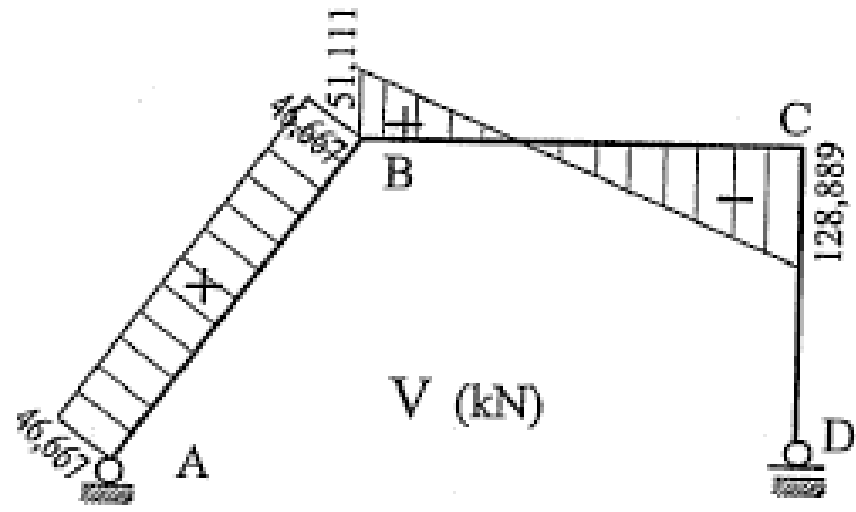
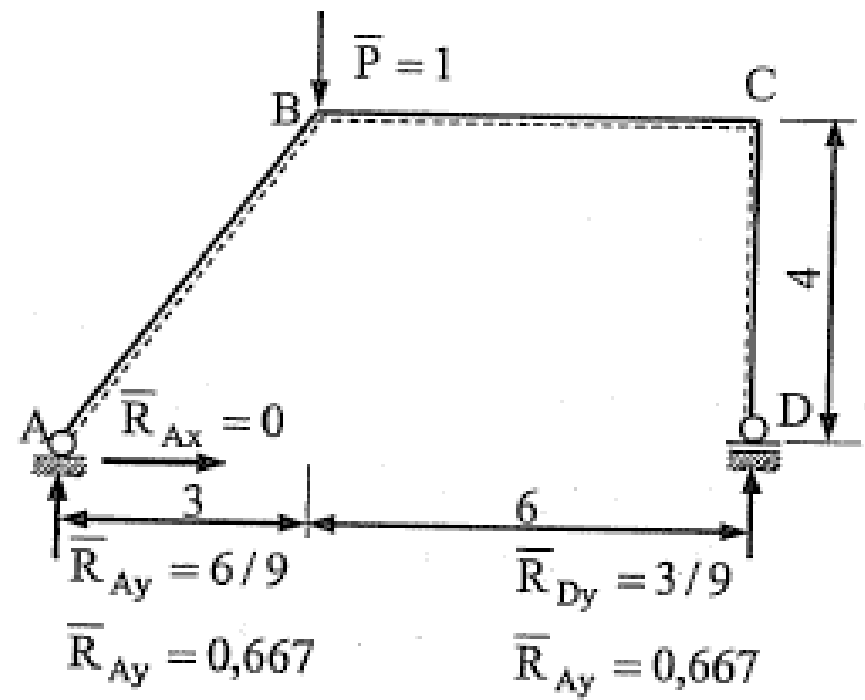
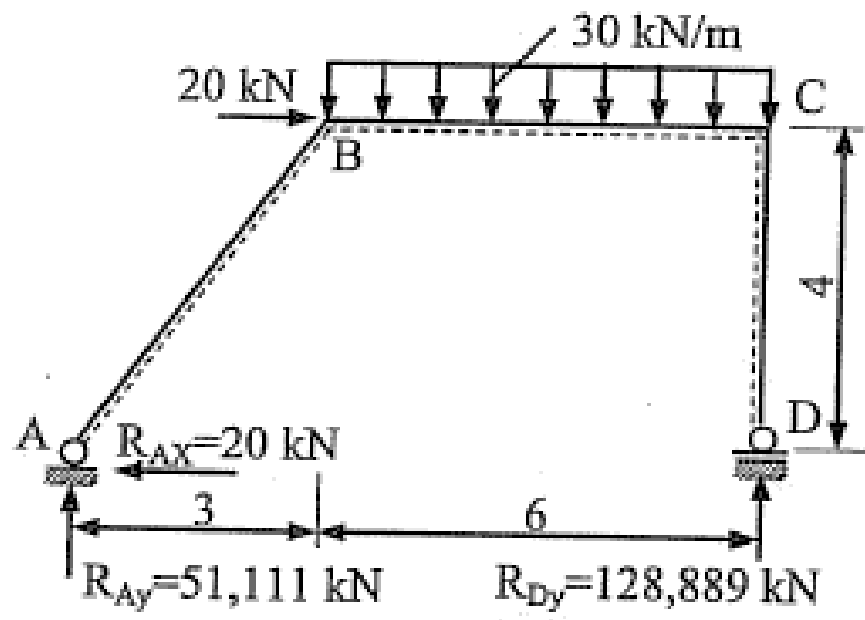


Şekil 1.2.20a sistemin geometrik boyutları

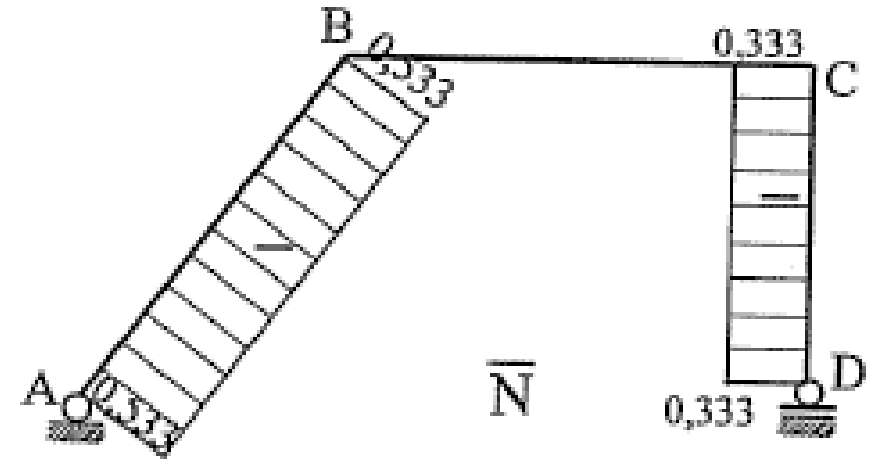
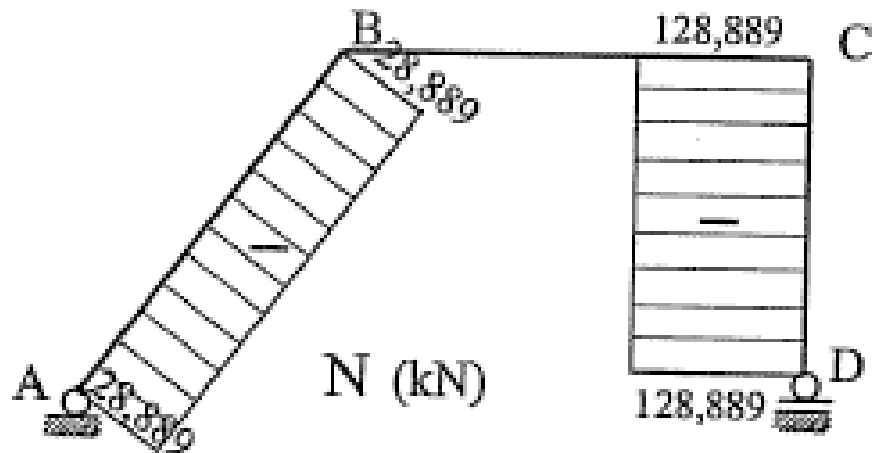
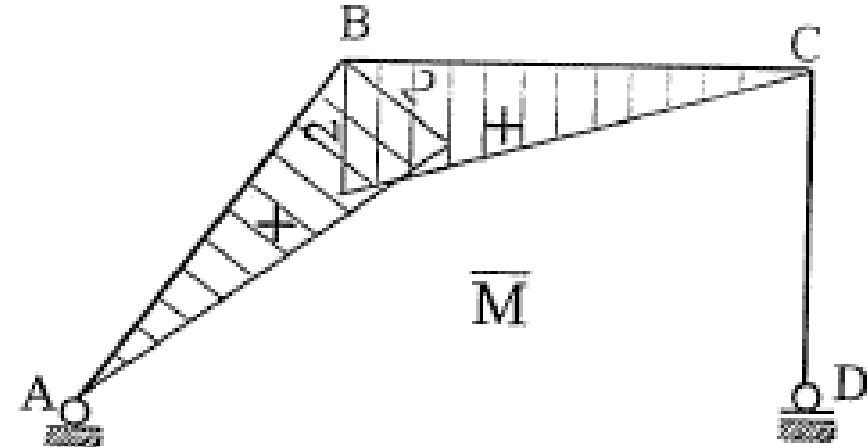
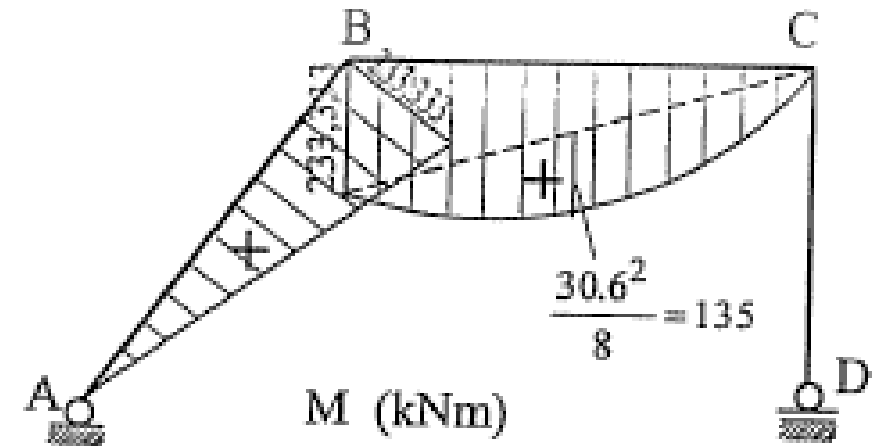
Şekil 1.2.20a'da geometrik boyutları ve Şekil 1.2.20b'de yükleme durumu verilen çerçeve sistem bir soğuk hava deposu elemanı olup C20 betonu ile betonarme olarak inşaa edilmiştir. Yapının montaj sıcaklığı $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, iç sıcaklığı $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ ve dış sıcaklığı $45\text{ }^{\circ}\text{C}$ 'dir. AB çubuğu 40/30, BC çubuğu 60/30 ve CD çubuğu 25/30 cm'dir. Sistemde B noktasında

- Verilen dış yüklerden
- Sistemde meydana gelen sıcaklık değişimlerinden meydana gelen düşey yer değiştirmeyi hesaplayınız.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



Şekil 1.2.20b Gerçek yükleme

Şekil 1.2.20c Birim yükleme

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Örnek 1.2.4

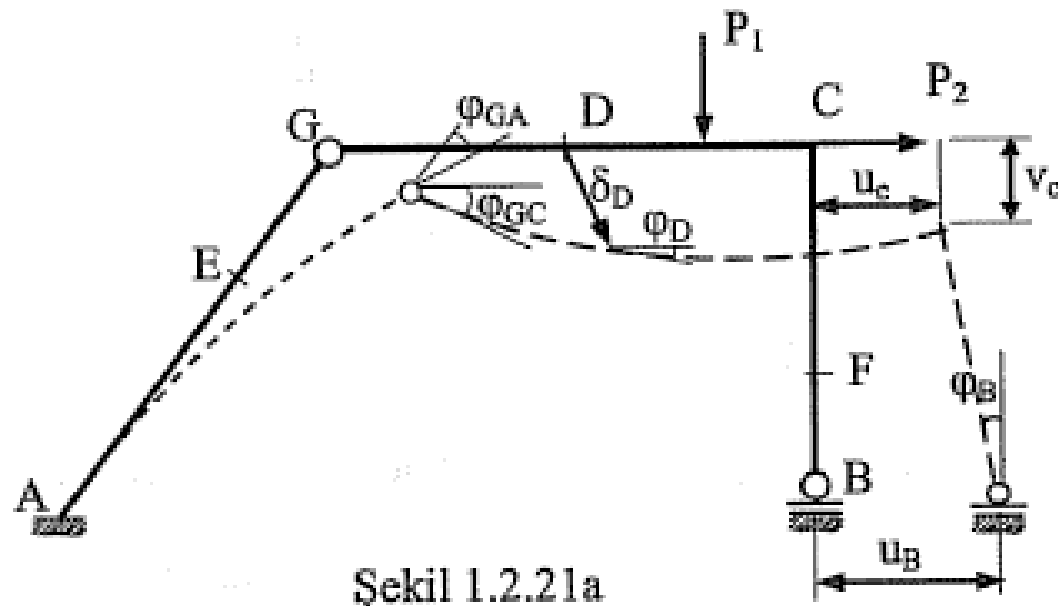
Şekil 1.2.21a'da görülen çerçevede işaretlenen kısımlardaki dönme açılarını ve yer değiştirmeleri hesaplamak için yapılması gereken birim yüklemeleri gösteriniz.

Çözüm

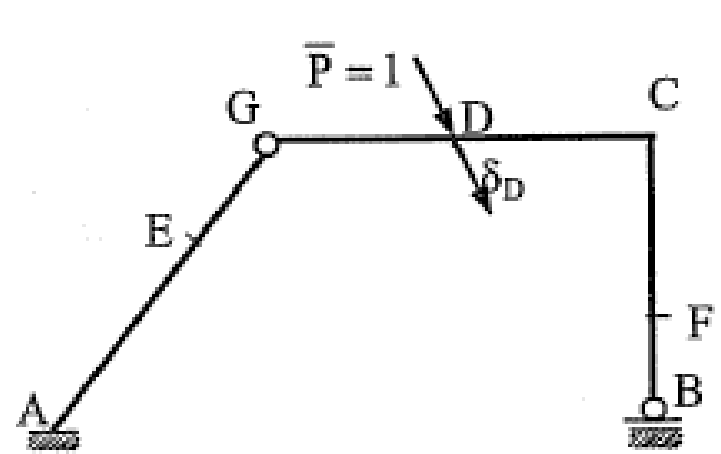
Şekil 1.2.21a'da gösterilen sistemde belirtilen noktalardaki dönme ve yer değiştirmeler için yapılacak birim yüklemeler Şekil 1.2.2b ila k'da gösterilmiştir.



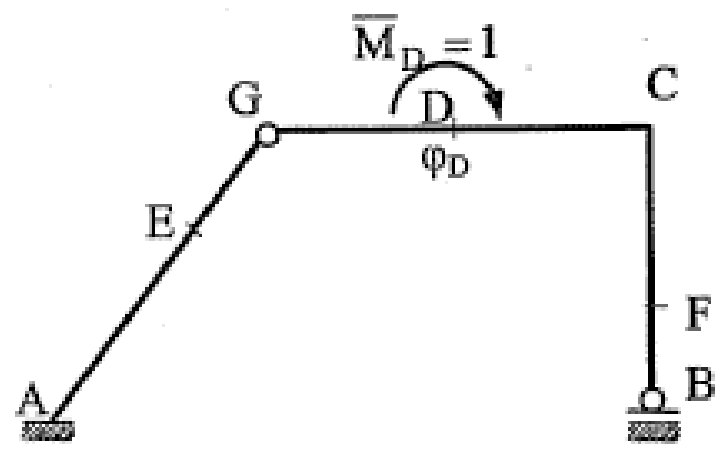
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



Şekil 1.2.21a

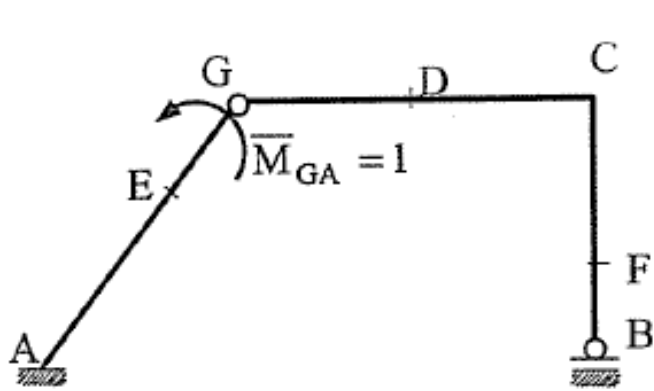


Şekil 1.2.21b δ_D için birim yükleme

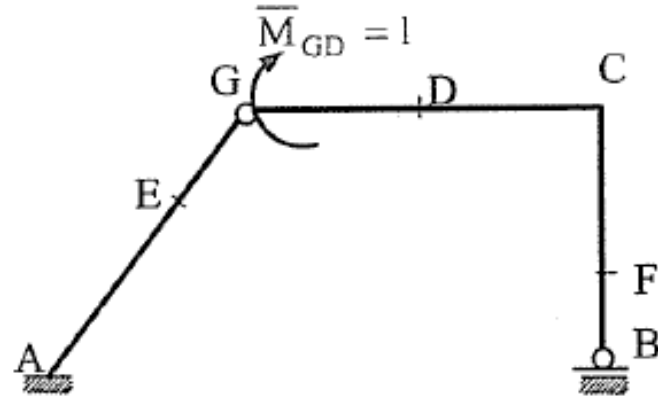


Şekil 1.2.21c ϕ_D için birim yükleme

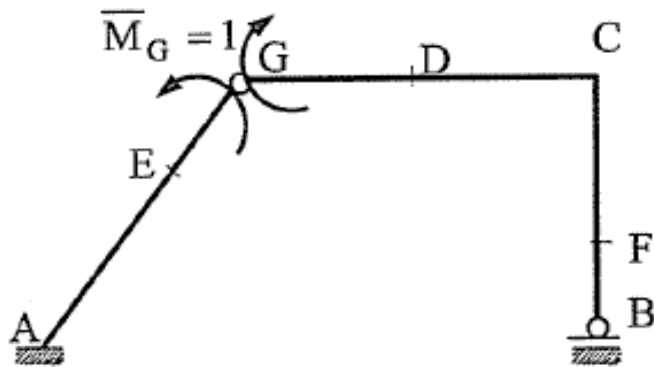
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



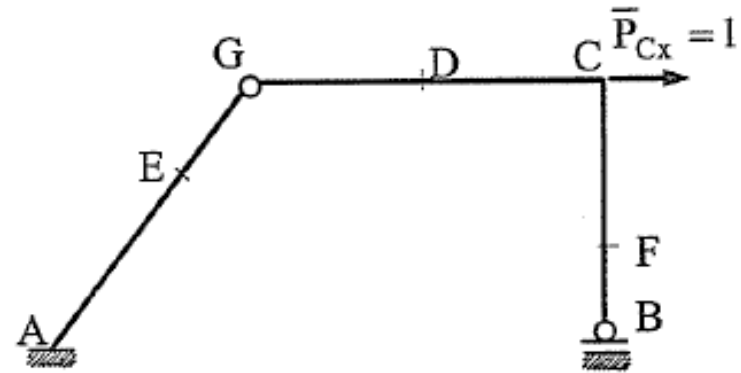
Şekil 1.2.21d ϕ_{GA} için birim yükleme



Şekil 1.2.21e ϕ_{GD} için birim yükleme

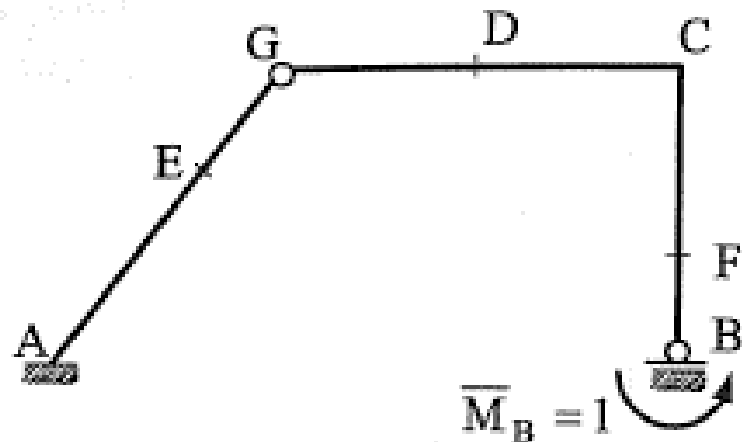


Şekil 1.2.21f $\Delta\phi_G$ için birim yükleme

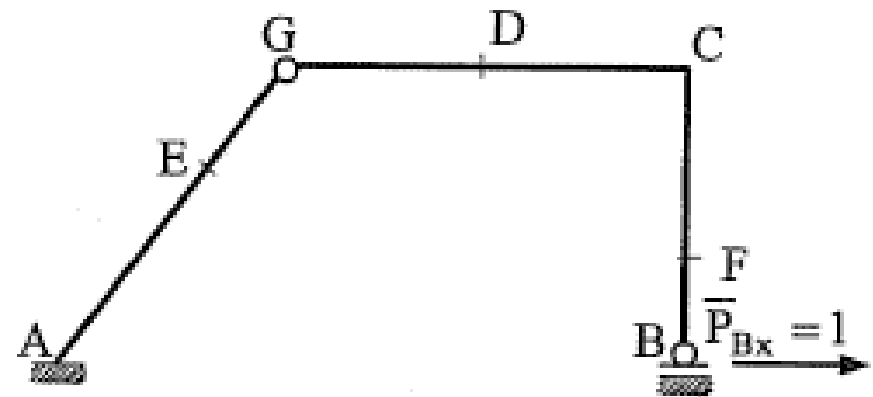


Şekil 1.2.21g u_C için birim yükleme

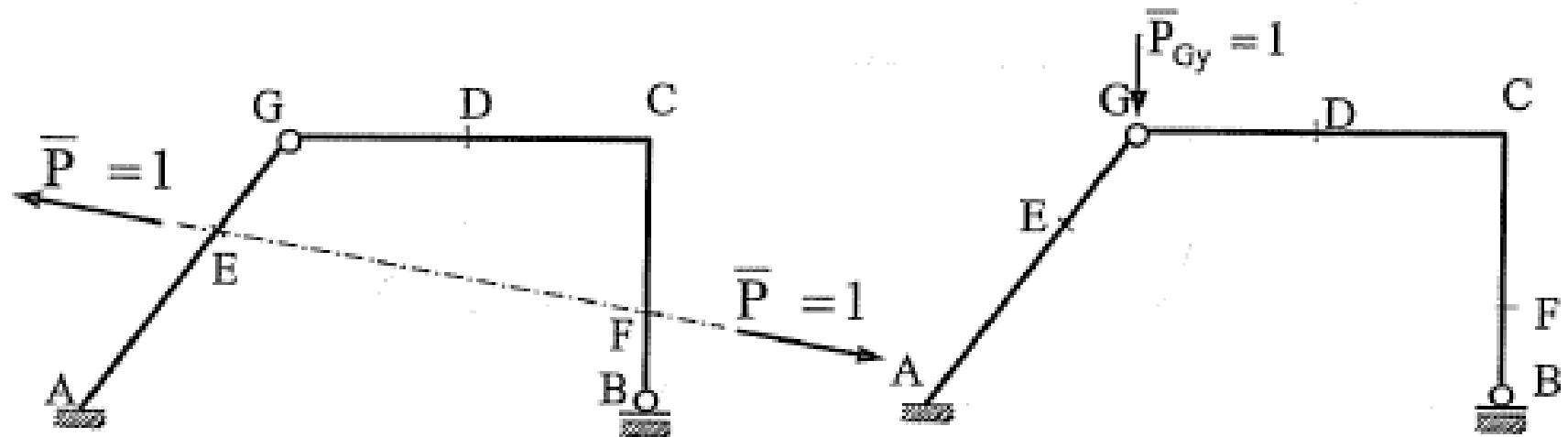
1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



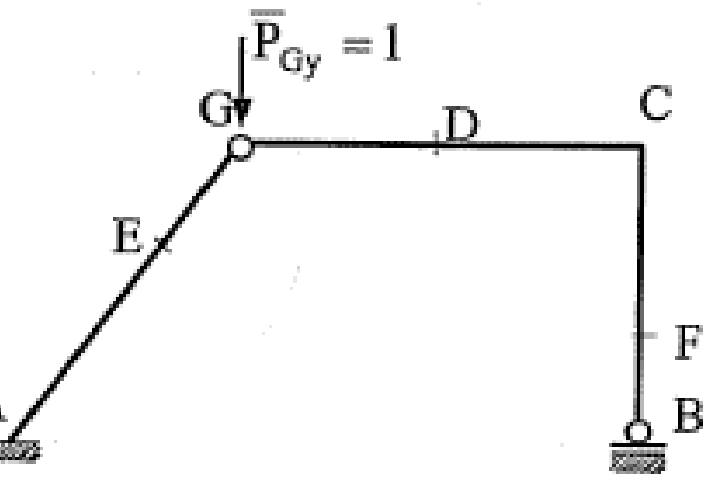
Şekil 1.2.21h φ_B için birim yükleme



Şekil 1.2.21ı u_B için birim yükleme



Şekil 1.2.21j E ve F kesitleri arasındaki
rölatif yer değiştirme δ_{EF} için birim yükleme



Şekil 1.2.21k v_G için birim
yükleme

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

1.2.4.3.2.2 Kafes sistemler

1.Sistemde gerçek yüklerden meydana gelen N çubuk kuvvetleri hesaplanır.

2.Yer değiştirme hesaplamak için yer değiştirmenin tatbik noktası ve yönünde $\bar{P}=1$ yükleme yapılır ve $\bar{N}$ çubuk kuvvetleri hesaplanır.

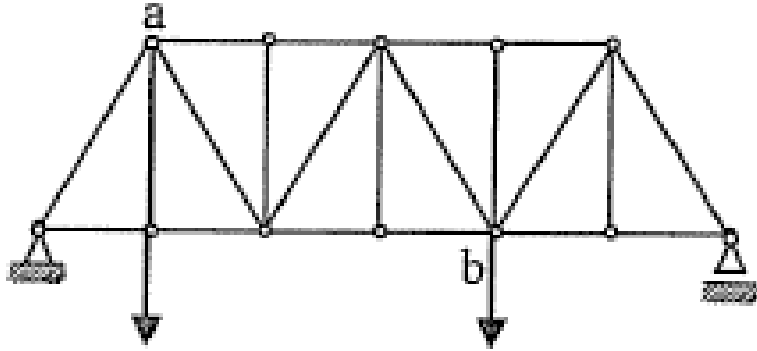
3.Sistemde her çubuk ve sistemin tamamı için $N\bar{N}L/EA$ değerleri hesaplanır ve

$$\delta_i = \sum \frac{N_n \bar{N}_n L_n}{E_n A_n} \quad (1.2.62)$$

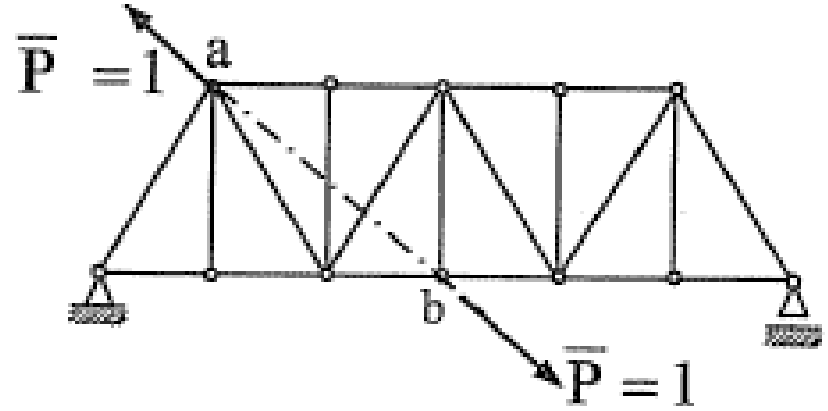
şeklinde hesaplanır.



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler



Şekil 2.22a Kafes sistem

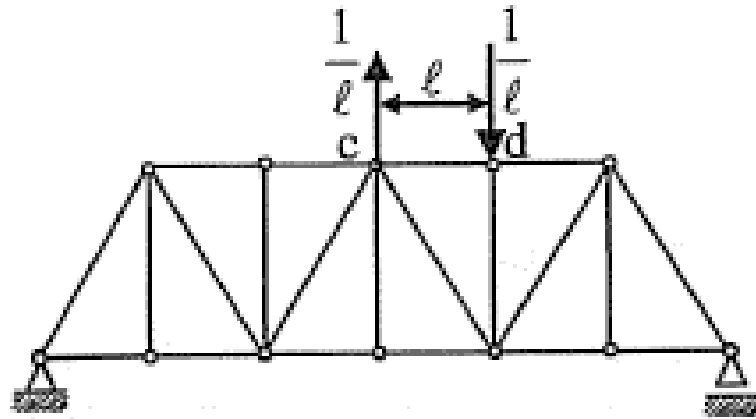


Şekil 2.22b Kafes sistemde a ve b noktaları arasındaki rölatif yer değiştirme (δ_{ab}) için birim yükleme

Şekil 1.2.22a'da gösterilen kafes sistemin a ve b noktaları arasında meydana gelen relatif yer değiştirme için yapılması gereken birim yükleme Şekil 1.2.22b'de gösterilmiştir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

cd çubuğunun dönme açısı için gerekli birim yükleme Şekil 1.2.22c'de gösterilmiştir

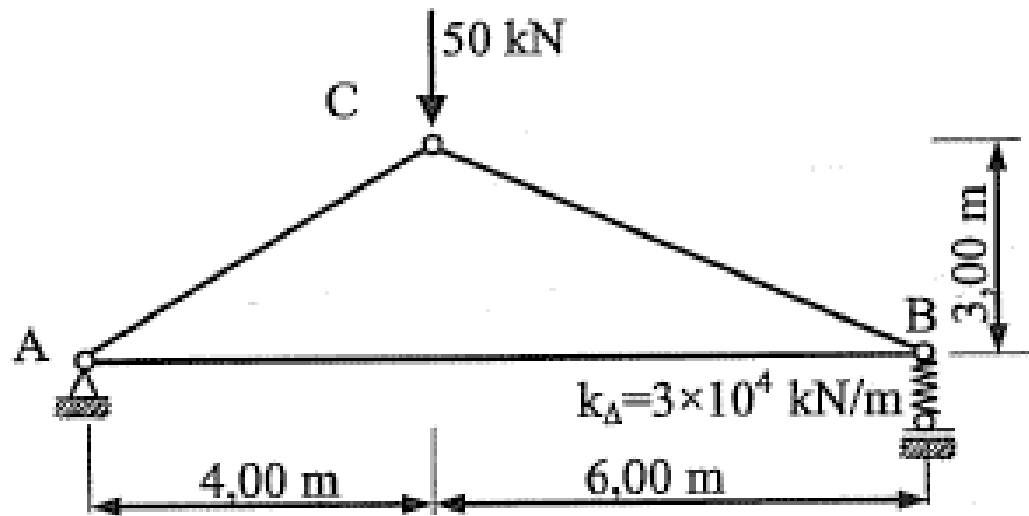


Şekil 1.2.22c Kafes sistemde c ve d noktaları arasındaki dönme (ϕ_{cd}) için birim yükleme



1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

Örnek 1.2.5

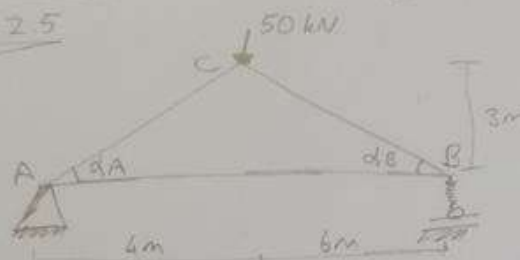


Şekil 1.2.23a

Şekil 1.2.23a'da boyutları ve yükleme durumu verilen sistemde C noktasının düşey ve yatay yer değiştirmesini hesaplayınız. AC ve BC çubuklarının alanı 30 cm^2 ve AB çubuğunun alanı 20 cm^2 ve Elastisite modülü $2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ 'dir.

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

ÖRN 1.2.5



$LAC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
 $LBC = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6,71$
 $\sin \alpha = 0,6$
 $\cos \alpha = 0,8$
 $\sin \beta = 0,4472$
 $\cos \beta = 0,8845$

Masnet Tepkileri :

$$R_{Ay} = \frac{50 \times 6}{10} = 30 \text{ kN} \uparrow \quad R_{By} = \frac{50 \times 4}{10} = 20 \text{ kN} \uparrow \quad R_{Ax} = 0$$

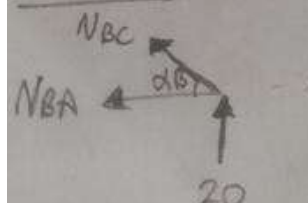
Güçlük Kuvvetleri

A Düşümü



$N_{AC} \cdot \sin \alpha = 30$
 $N_{AC} = -50 \text{ kN}$
 $N_{AC} \times \cos \alpha + N_{AB} = 0$
 $-50 \times 0,8 + N_{AB} = 0 \Rightarrow N_{AB} = 40$

B Düşümü

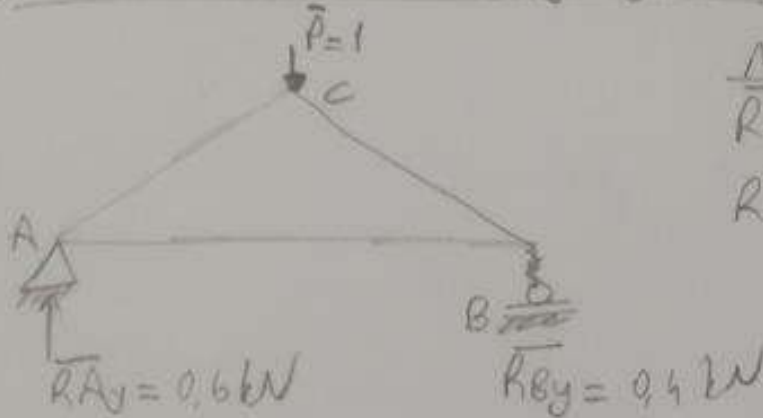


$N_{BC} \cdot \sin \beta + 20 = 0$
 $N_{BC} = \frac{-20}{0,4472} = -44,72 \text{ kN}$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

a) C Noktasındaki Düşey yer değiştirmenin Hesabı

(25)

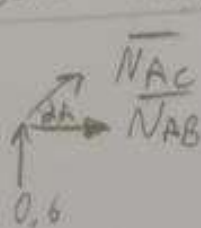


Menet Tepkileri

$$R_{By} \cdot 10 = 1 \times 4 \Rightarrow R_{By} = 0.4 \text{ kN}$$

$$R_{Ay} \cdot 10 = 1 \times 6 \Rightarrow R_{Ay} = 0.6 \text{ kN}$$

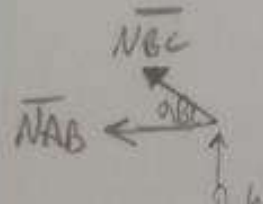
Güçlük Kuvvetleri



$$N_{AC} \times \sin \alpha_A + 0.6 = 0$$

$$N_{AC} = -1 \text{ kN}$$

$$N_{AC} \times 0.8 + N_{AB} = 0 \Rightarrow N_{AB} = 0.80 \text{ kN}$$



$$0.4 + N_{BC} \cdot \sin \alpha_B = 0 \Rightarrow N_{BC} = -0.89 \text{ kN}$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

$$V_{cy} = \sum_{n=1}^3 N_n \cdot \bar{N}_n \cdot \frac{L_n}{A_n E} + \bar{R}_{By} \cdot \frac{R_{By}}{k_{AB}}$$

AC grubu

$$V_{cy} = \frac{(-50) \times (-1) \cdot 5}{0,0030 \times 2,1 \times 10^8} + \frac{(-44,72) \cdot (-0,89) \cdot 6,71}{0,0030 \times 2,1 \times 10^8}$$

BC grubu

$$+ \frac{40 \times 0,8 \times 10}{0,0020 \times 2,1 \times 10^8} + \frac{0,4 \times 20}{3 \times 10^4}$$

AB grubu

Elastik mesnet

$$V_{cy} = 39,683 \times 10^{-5} + 42,596 \times 10^{-5} + 76,190 \times 10^{-5} + 0,267 \times 10^{-5}$$
$$= 0,159 \times 10^{-2}$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

b) C Noktasının lotay yer Değiştirmesi

(26)

Diagram showing a truss structure with a horizontal force $P=1$ applied at joint C. The truss has a horizontal span of 10m (4m + 6m) and a vertical height of 3m. Joint A is a pin support with reactions $R_{Ax}=1$ (left) and $R_{Ay}=0.3$ (down). Joint B is a roller support with reactions $R_{Bx}=0.3$ (left) and $R_{By}=0.3$ (up).

Menet Tepkileri

$$\overline{R_{By}} \cdot 10 = 1 \times 3$$
$$\overline{R_{By}} = 0.30 \uparrow$$
$$\overline{R_{Ay}} = 0.30 \uparrow$$

Güçlük kuvvetleri:

Free body diagram of joint C showing internal forces $\overline{N_{AC}}$ and $\overline{N_{AB}}$ and external forces 1 and 0.3 .

$$\overline{N_{AC}} \times 0.6 = 0.3 \Rightarrow \overline{N_{AC}} = 0.5$$
$$0.5 \times 0.8 + \overline{N_{AB}} = 1 \Rightarrow \overline{N_{AB}} = 0.6$$

Free body diagram of joint B showing internal forces $\overline{N_{BC}}$ and $\overline{N_{BA}}$ and external forces 0.3 and 0.3 .

$$\overline{N_{BC}} \cdot 0.4472 = -0.3 \Rightarrow \overline{N_{BC}} = -0.671$$

1. İzostatik Sistemlerde Şekil ve Yer Değiştirmeler

$$\begin{aligned} V_{Cx} &= \sum_{n=1}^{n=3} \bar{N}_n \cdot N_n \cdot \frac{L_n}{EA_n} + R_{By} \cdot \frac{R_{By}}{k_{AB}} \\ &= \underbrace{(-50) \times (10,5) \cdot 5}_{\text{AB üyüğü}} \cdot \frac{1}{0,0030 \times 2,1 \times 10^8} + \underbrace{(-46,72) \times (-0,671) \cdot 6,71}_{\text{BC üyüğü}} \cdot \frac{1}{0,0030 \times 2,1 \times 10^8} \\ &\quad + \frac{40 \times 0,6 \times 10}{0,0020 \times 2,1 \times 10^8} + \underbrace{\frac{20 \times 0,3}{3 \times 10^4}}_{\text{yapısal çöküş}} \\ &= -19,841 \times 10^{-5} + 31,943 \times 10^{-5} + 57,143 \times 10^{-5} + 0,2 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

