



İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yapı Statik II Dersi

Doç. Dr. Müslüm Murat MARAŞ

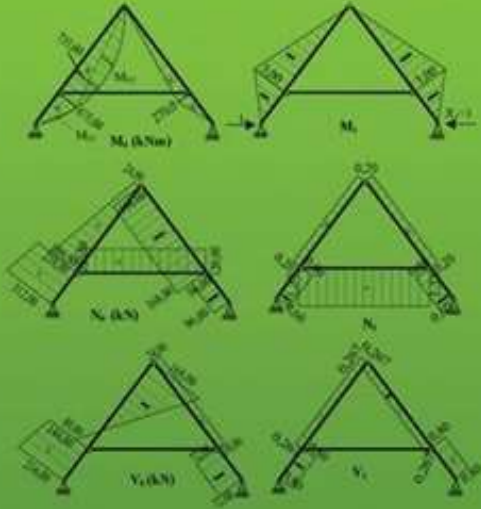
Malatya

Kaynaklar

BİRSEN YAYINEVİ

YAPI STATİĞİ II

YAPI SİSTEMLERİNDE YER DEĞİŞTİRMELERİN
VE
HİPERSTATİK SİSTEMLERİN
HESAP YÖNTEMLERİ



Prof. İbrahim EKİZ

GÜNCELLESTİRİLMİŞ
3.
BASKI

YAPI STATİĞİ II

Yapı Sistemlerinde Yer
Değiştirmelerin Ve Hiperstatik
Sistemlerin Hesap Yöntemleri

Prof. Dr. İbrahim EKİZ

2. Hiperstatik Sistemler

2 HİPERSTATİK SİSTEMLERİN HESAP YÖNTEMLERİ

2.1 GİRİŞ

Hiperstatik sistemlerin çözümünde izostatik sistemlere göre aşağıda belirtilen iki önemli fark vardır.

1. Hiperstatik sistemlerin çözümünde sistemi teşkil eden elemanların sadece geometrisi değil aynı zamanda Elastisite modülü, Kayma modülü v.b gibi elastik özellikleri, alan ve atalet momenti gibi enkesit özelliklerinin de bilinmesi gerekir. Bu yüzden başlangıçta belirlenen çubuk boyutlarının çözümleme sonucunda değiştirilmesi ve hesabın tekrar yapılması ve hatta bu işlemlerin birkaç kez tekrarlanması gerekebilir.

2. Genelde, hiperstatik sistem elemanlarında sadece kuvvet türü yüklerden değil, sıcaklık değişimi, mesnet hareketleri, yapım hataları v.b gibi diğer etkenlerden de iç kuvvetler meydana gelir. Bilindiği gibi, sayılan bu diğer etkiler izostatik sistem elemanlarında sadece şekil değiştirme meydana getirir, iç kuvvet meydana getirmez. Bu durumda önce sistemin labil, izostatik ve hiperstatik olup olmadığı belirlenir.

2. Hiperstatik Sistemler

Hiperstatik bilinmeyen statik büyüklük olarak kuvvet veya yer değiştirme seçilebilir. Bilinmeyenleri kuvvet olarak seçilen hesap yöntemine **kuvvet yöntemi** denir. Bilinmeyenleri yer değiştirme olarak seçilen hesap yöntemine **yer değiştirme yöntemi** denir. Doğrusal yer değiştirmeler açılara bağlı olarak da ifade edilebildiğinden tüm bilinmeyenler açı olarak seçilir. Bu nedenle yer değiştirme yöntemine genel olarak **açı yöntemi** denir.



2. Hiperstatik Sistemler

2.1.1 Kullanılan Şartlar

Hiperstatik sistemlerin çözümünde:

1. Denge ve mafsalsal şartları
2. Mesnet şartları
3. Geometrik uygunluk ve süreklilik şartları

gözönüne alınır. Aşağıda bu şartların çözümlemede nasıl göz önüne alınacağı belirtilmiştir.

2.1.1.1.Denge ve Mafsalsal Şartları

Sistemin dengede olduğunu belirten şartlardır. Düzlem çubuk sistemlerde sistemin dengede olabilmesi için üç denge şartının sağlanması gerekir. Bunların neler olduğu daha önce detaylı olarak açıklanmıştır. Sistemde mafsalların bulunması durumunda mafsalsal şekline bağlı olarak her mafsal için bir de mafsalsal şartı yazılabilir. Örneğin moment mafsalsalında o kesitte momentin sıfır olması şartı gibi.

2. Hiperstatik Sistemler

2.1.1.2 Mesnet Şartları

Mesnet şartları genel olarak sınır şartları olarak tanımlanır. Bu şartların mesnedin cinsine göre neler olduğu Bölüm 1.2.7.1 de verilmiştir. Aşağıda yaygın kullanılan bazı mesnetler için özet olarak tekrar edilmiştir.

	Ankastre mesnet için $\Delta\varphi = 0$, $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ 3 şart
	Sabit mesnet için $\Delta\varphi \neq 0$, $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ 2 şart
	Hareketli mesnet için $\Delta\varphi \neq 0$, $\Delta u \neq 0$, $\Delta v = 0$ 1 şart

Şekil 2.3.1 Mesnet şartları

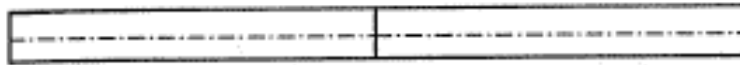
2. Hiperstatik Sistemler

2.1.1.3-Sistemin Geometrik Uygunluk Şartı

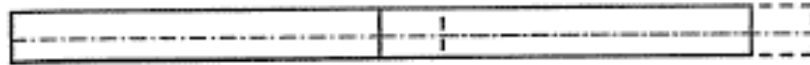
Bunlar sistemin geometrisi ile ilgili olan şartlardır. Sistemde herhangi bir çubuk elemanın bir kesitin sol ve sağ tarafının bir birine göre dönmesi $\Delta\varphi$, eksenel doğrultudaki yer değiştirmesi Δu ve eksene dik doğrultudaki yer değiştirmesi Δv ile gösterilirse o kesitte süreklilikten dolayı kesitin iki tarafı bir birine göre dönmez, ötelenmez ve çökmez. Diğer bir anlatımla

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta u = 0 \text{ ve } \Delta v = 0$$

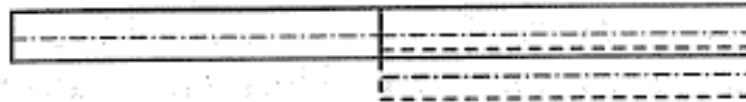
olur.



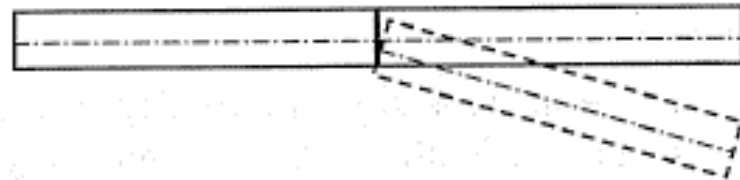
(a) Çubuk eleman



(b) Kesitin sağ ve solu bir birine göre eksenel doğrultuda hareket etmez $\Delta u = 0$



(c) Kesitin sağ ve solu bir birine göre çubuk eksenine dik doğrultuda hareket etmez $\Delta v = 0$



(d) Kesitin sağ ve solu bir birine göre dönmez $\Delta\varphi = 0$

Şekil 2.3.2 Geometrik uygunluk şartları

2. Hiperstatik Sistemler

2.2 STATİK OLARAK BELİRSİZ (HİPERSTATİK) SİSTEMLER

Toplam mesnet tepkileri ve iç kuvvetleri bağımsız statik denge şartlarından fazla olan sistemlere **hiperstatik sistemler** denir. Mesnetleri denge eşitlikleri ile belirlenebilen iç kuvvetleri belirlenemeyen sistemlere **içten hiperstatik sistemler** denir. Statik denge için yazılabilen eşitlik sayısından fazla olan iç kuvvet ve mesnet tepkisi sayısına **hiperstatiklik derecesi** denir.

Bilinmeyen değer olarak iç kuvvet ve mesnet tepkisi yerine yer değiştirmeler (açısal ve doğrusal yer değiştirmeler) de seçilebilir. Bir sistemin düğüm noktalarında serbest kalan toplam yer değiştirme sayısına o sistemin **serbestlik derecesi** denir.



2. Hiperstatik Sistemler

2.2.1.Sistemlerin Hiperstatiklik Derecesi

2.2.1.1 Dolu Gövdeli Sistemler

Rijit düğüm noktası, birleşimindeki bir elemandan diğerine kuvvet ve moment aktarabilen düğüm noktasıdır.

Rijit düğüm noktalarından oluşan rijit bir çerçeve statik denge durumunda ise onu meydana getiren her bir çubuk ve düğüm noktası da statik denge durumundadır. Bu durumda çubuk sayısı $\ç$ ve mesnetler dâhil düğüm noktası sayısı d ile gösterilirse toplam statik denge sayısı

$$n_d = 3\ç + 3d \quad (2.2.1)$$

yazılır. Sistemdeki her çubuğun her ucunda 3 olmak üzere toplam 6 iç kuvvet ve sistemdeki tüm mesnetlerde n_r sayıda mesnet tepkisi olduğundan sistemdeki kuvvet sayısı

$$n_k = 6\ç + n_r \quad (2.2.2)$$

2. Hiperstatik Sistemler

Buna göre bilinmeyen kuvvet sayısı

$$n = n_k - n_d \quad (2.2.3)$$

olur. (2.2.3) eşitliğinde n_k ve n_d 'nin (2.2.1) ve (2.2.2) eşitliklerindeki değerleri yerlerine konularak

$$n = 6ç + n_r - 3ç - 3d$$

ve gerekli sadeleştirme yapılarak

$$n = 3(ç - d) + n_r \quad (2.2.4)$$

olarak bulunur. Eğer sistemde n_m sayıda özel mafsalsal şartı varsa bunların her biri ile bir denge şartı yazılabileceğinden bilinmeyen kuvvet sayısı

$$n = 3(ç - d) + n_r - n_m \quad (2.2.5)$$

2. Hiperstatik Sistemler

Burada n bilinmeyen kuvvet sayısına sistemin **hiperstatiklik derecesi** denir.

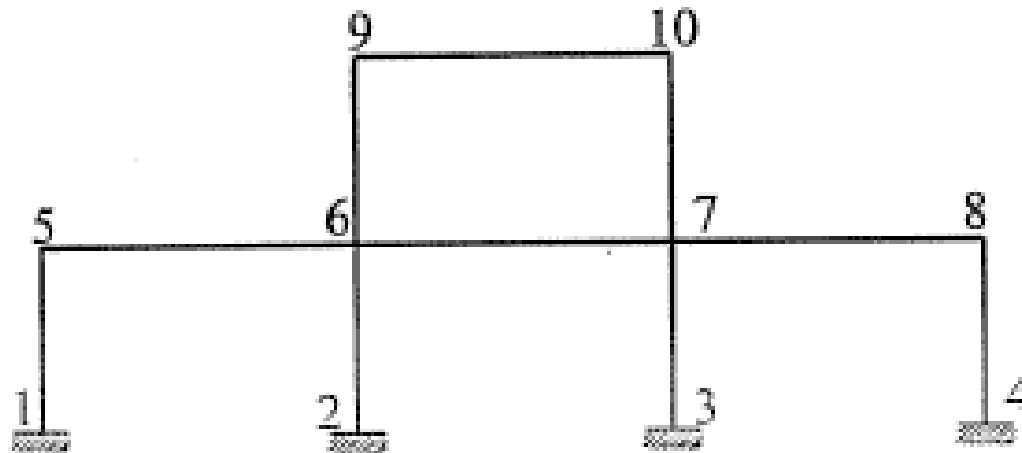
$n = 0$ ise sistem izostatiktir.

$n < 0$ ise sistem geometrik olarak stabil değildir (labil, oynaktır).

$n > 0$ ise sistem n inci dereceden hiperstatiktir.

Örnek 2.2.1

Şekil 2.2.1a da verilen sistemin hiperstatiklik derecesini hesaplayınız.

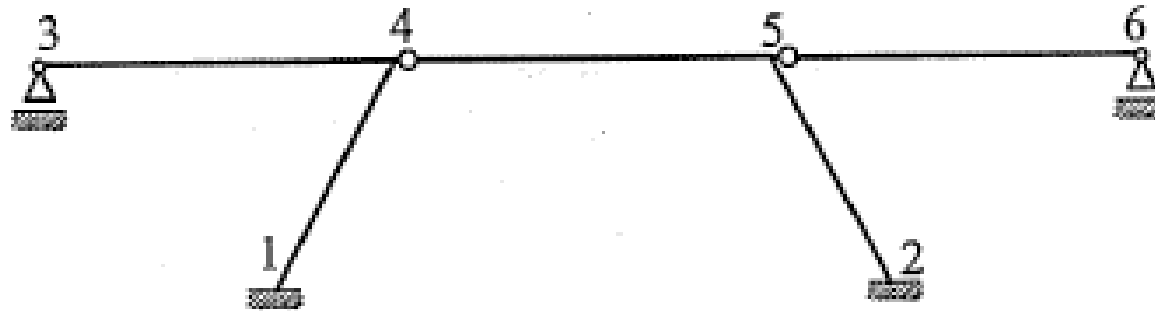


Şekil 2.2.1a

2. Hiperstatik Sistemler

Örnek 2.2.2

Şekil 2.2.1b de verilen sistemin hiperstatiklik derecesini hesaplayınız.



Şekil 2.2.1b



2. Hiperstatik Sistemler

2.2.1.2 Kafes Sistemler

Kafes sistemlerde düğüm noktaları mafsallı olduğundan her düğüm noktasında 2 denge şartı yazılabilir. Buna göre denge denklemi sayısı

$$n_d = 2d \quad (2.2.6)$$

olur. Kafes sistemdeki her çubukta eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfır olduğundan bir iç kuvvet vardır ve sistemdeki tüm mesnetlerde n_r sayıda mesnet tepkisi olduğundan sistemdeki kuvvet sayısı

$$n_k = \zeta + n_r \quad (2.2.7)$$

dir. Buna göre bilinmeyen kuvvet sayısı, diğer bir anlatımla sistemin hiperstatiklik derecesi

$$n = n_k - n_d \quad (2.2.8)$$

yazılır ve burada n_k ve n_d 'nin sırayla (2.2.6) ve (2.2.7) eşitliklerindeki değerleri yerine konularak

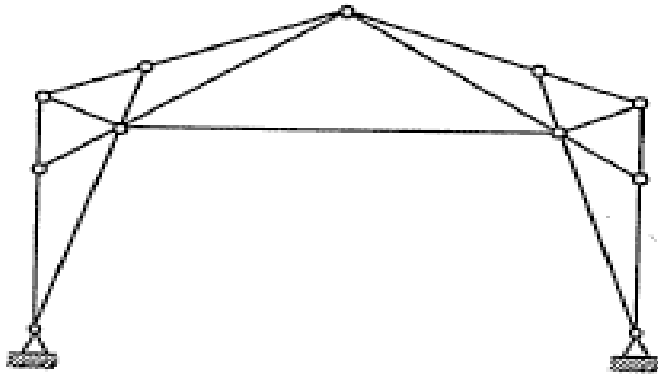
$$n = \zeta + n_r - 2d \quad (2.2.9)$$

olarak bulunur.

2. Hiperstatik Sistemler

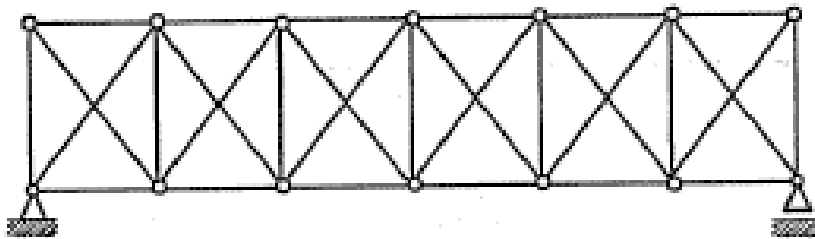
Örnek 2.2.3

Şekil 2.2.2a'da verilen kafes sistemin hiperstatiklik derecesini hesaplayınız.



Şekil 2.2.2a

Örnek 2.2.4



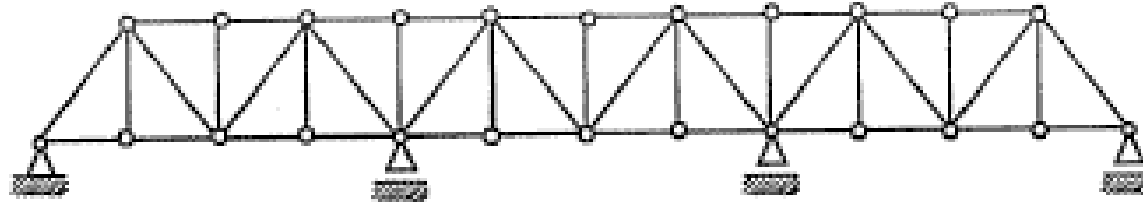
Şekil 2.2.2b

Şekil 2.2.2.b'de verilen kafes sistemin hiperstatiklik derecesini hesaplayınız.

2. Hiperstatik Sistemler

Örnek 2.2.5

Şekil 2.2.2.c de verilen kafes sistemin hiperstatiklik derecesini hesaplayınız.

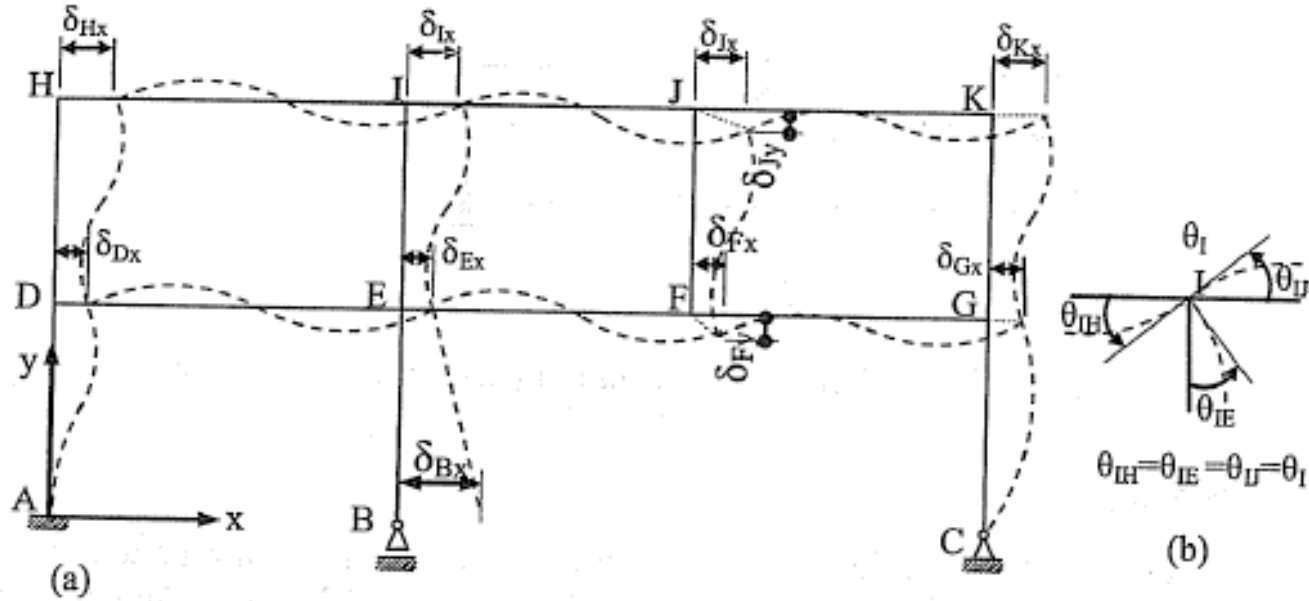


Şekil 2.2.2c

2.2.2 Sistemlerin Serbestlik Dereceleri

Düzlem çerçeve sistemlerin her düğüm noktasında θ dönme açısı (açısal yer değiştirme) ve δ_x ve δ_y yer değiştirmeleri olmak üzere üç yer değiştirme bulunmaktadır. Bernoulli hipotezi gereğince bir düğüm noktasında birleşen çubukların her birinin dönme açısı aynı olup, o da düğüm noktasının dönme açısına eşittir.

2. Hiperstatik Sistemler



Şekil 2.2.3 Sistemlerin yer değiştirmeleri

Örneğin Şekil 2.2.3b’de I düğüm noktasında

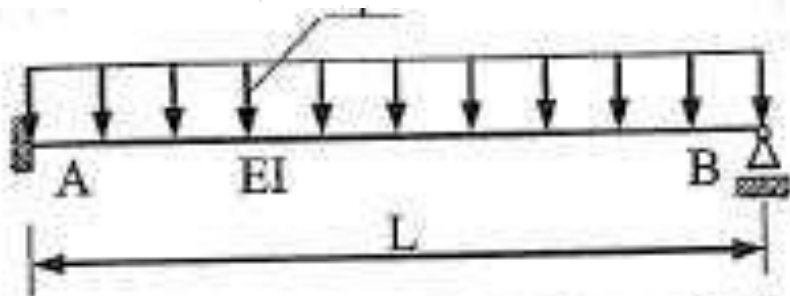
$$\theta_{IH} = \theta_{IE} = \theta_{IJ} = \theta_I \quad (2.2.10)$$

dır. Bu bakımdan rijit bir düğüm noktasında kaç çubuk birleşirse birleşsin o düğüm noktasında bir dönme açısı bulunmaktadır. Bilindiği gibi ankastre mesneden serbestlik derecesi sıfır, mafsallı basit mesneden serbestlik derecesi bir (dönme açısı) ve mafsallı kayıcı mesneden serbestlik derecesi iki’dir (dönme açısı ve hareket doğrultusundaki yer değiştirme). Bir sistemde düğüm noktalarında serbest kalan yer değiştirme (açısal ve doğrusal) sayısına o sistemin **serbestlik derecesi** denir.

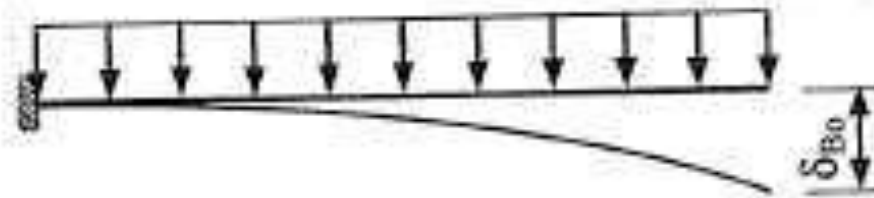
2. Hiperstatik Sistemler

2.3 KUVVET YÖNTEMİ

2.3.1-Giriş



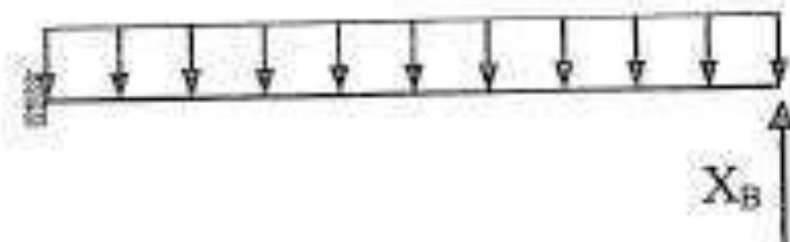
(a) 1.dereceden hiperstatik sistem



(b) B ucundaki düşey mesnet bağı kaldırılarak izostatik hale getirilen sistem



(c) Mesnet bağının kaldırıldığı yerde bozulan mesnet bağı doğrultusunda kuvvet uygulanan sistem

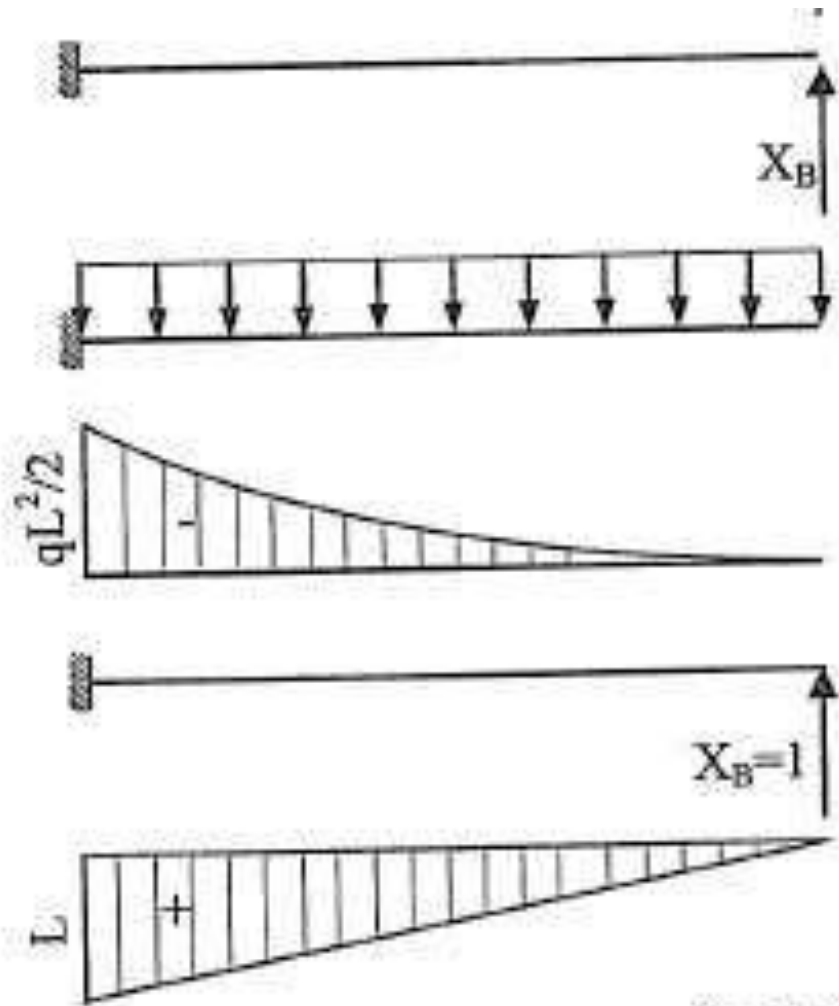


(d) Eşdeğer sistem

2. Hiperstatik Sistemler

2.3 KUVVET YÖNTEMİ

2.3.1-Giriş



Şekil 2.3.1

(e) İzostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyen kuvvet

(f) Sıfır Yükleme

(g) M_0 eğilme momenti diyagramı

(h) Birim Yükleme

(i) M_1 eğilme momenti diyagramı

2. Hiperstatik Sistemler

Şekil 2.3.1a'da verilen sistem 1. dereceden hiperstatik bir sistemdir. Bu sistemin B mesnedindeki düşey mesnet bağıını kaldırırsak sistem Şekil 2.3.1b'de olduğu gibi izostatik bir sistem haline gelir ve sistemin B ucundaki mesnet şartı bozulmuş olduğundan düşey doğrultuda δ_{B0} kadar yer değiştirir. Şekil 2.3.1d'de olduğu gibi bu yer değiştirmeyi önleyecek şekilde X_B kuvveti uygulanırsa gerçek sistemdeki iç kuvvetler ve yer değiştirmeler ile bu sistemdeki iç kuvvetler ve yer değiştirmeler aynı olur. Buna **eşdeğer sistem** de denir. Şekil 2.3.1c'de görüldüğü gibi X_B kuvvetinden dolayı B mesnedindeki düşey yer değiştirme δ_{BB} kadar olur.

B mesnedindeki düşey yer değiştirme

$$\delta_B = \delta_{B0} + \delta_{BB} \quad \text{olur.} \quad (2.3.1)$$



2. Hiperstatik Sistemler

Gerçek sistemde B ucundaki düşey yer değiştirme $\delta_B = 0$ olduğundan bu mesnet şartı gereği

$$\delta_B = \delta_{B0} + \delta_{BB} = 0 \quad (2.3.2)$$

yazılır. Burada B ucunda dış yükten meydana gelen yer değiştirme $\delta_{B0} = \delta_{b0}$ ve $X_B = 1$ birim yükten meydana gelen yer değiştirmeyi δ_{b1} ile gösterirsek X_B den meydana gelen δ_{BB} değeri $X_B \delta_{b1}$ olur. Bu değer (2.3.2) eşliğinde yerine konulursa

$$\delta_B = \delta_{b0} + X_B \delta_{b1} = 0 \quad (2.3.3)$$

elde edilir. Buna yer **değiştirmelerin süperpozisyonu** veya **süreklilik eşitliği** denir. Bu eşitlikte δ_{b0} ve δ_{b1} değerleri herhangi bir yöntemle bulunarak X_B hiperstatik bilinmeyen kuvveti hesaplanır.

2. Hiperstatik Sistemler

Burada bu değerleri virtüel iş eşitliklerinden yararlanarak hesaplayalım. Bunun için izostatik hale getirilen **izostatik esas sistem** önce esas sisteme etkiyen yüklerle yüklenir (Şekil 2.3.1f). Bu yüklemeye **sıfır yükleme** denir. Bu yüklemeden meydana gelen M_0 (Şekil 2.3.1.g), V_0 ve N_0 kesit tesirleri hesaplanır. Sonra izostatik esas sistem X_B 'nin tatbik noktasında ve doğrultusunda $X_B=1$ birimlik yükle yüklenir (Şekil 2.3.1h). Bu yüklemeye **birim yükleme** denir. Bu birim yüklemeden meydana gelen M_1 (Şekil 2.3.1i), V_1 , N_1 kesit tesirleri diyagramları çizilir. Burada sadece M eğilme momentinin etkileri dikkate alınacağından kesme kuvveti diyagramları çizilmemiştir. Normal kuvvetin değeri de zaten sıfırdır. Bilindiği gibi izostatik esas sistemde B ucunda sıfır yüklemesinden meydana gelen δ_{b0} yer değiştirmesi

$$\delta_{b0} = \int M_0 M_1 \frac{dx}{EI} \quad (2.3.4)$$

ve B ucunda $X_B = 1$ yüklemesinden meydana gelen δ_{b1} yer değiştirmesi

$$\delta_{b1} = \int M_1 M_1 \frac{dx}{EI} = \int M_1^2 \frac{dx}{EI} \quad \text{şeklinde hesaplanır.}$$

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2 Yöntemin Genel Esasları

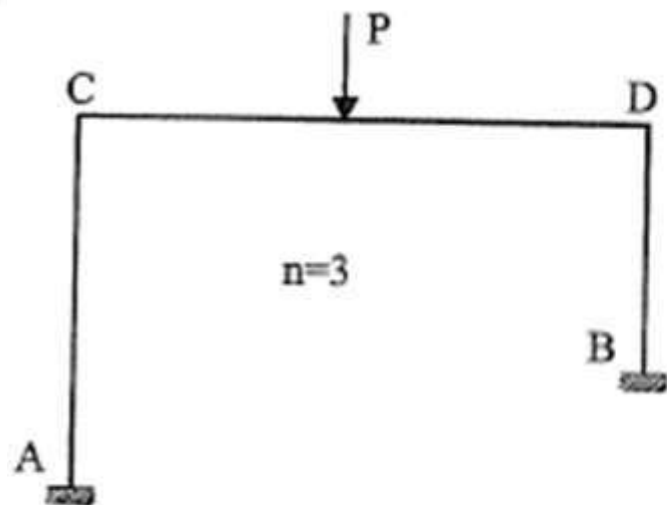
Bilindiği gibi n .inci dereceden hiperstatik bir sistemde bilinmeyen kuvvet sayısı n tanedir. Kuvvet yönteminde bu bilinmeyenlerin hepsi kesme kuvveti, eğilme momenti, normal kuvvet ve mesnet tepkileri gibi kuvvet olarak seçilir. Bu n tane kuvveti bulmak için denge ve mafsalsal şartlarından başka n tane daha eşitliğe ihtiyaç vardır. Bu eşitlikler de bilinmeyen olarak seçilen kuvvetlerin uygulandığı yerlerdeki n tane süreklilik ve mesnet şartından elde edilir.

1.inci dereceden hiperstatik bir sistem için yöntemin esası yukarıda açıklanmıştır. Şimdi bunları genel olarak aşağıdaki örnekle açıklayalım.

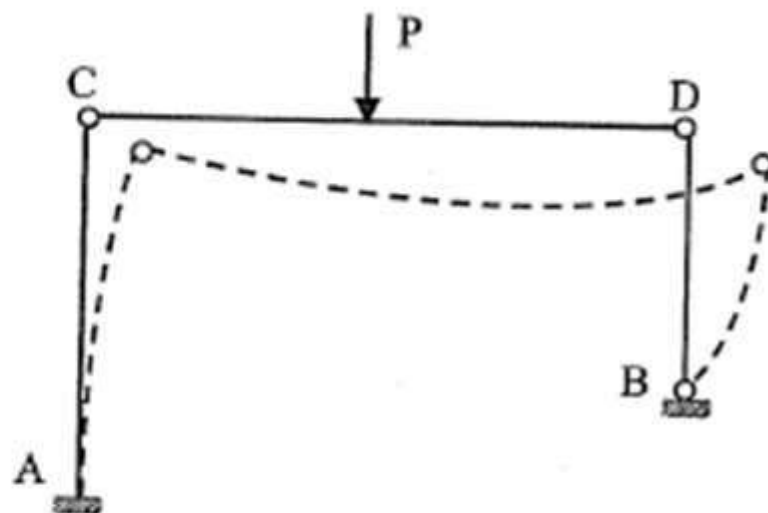


2. Hiperstatik Sistemler

Şekil 2.3.2a'da verilen 3. dereceden hiperstatik olan sistem, C ve D kesitlerinde iki mafsal konularak ve B mesnedinde bir mesnet bağı kaldırılarak izostatik hale getirilir (Şekil 2.3.2b). Bu durumda C ve D kesitlerinde süreklilik şartları ve B mesnedinde de mesnet şartı bozulmuştur. Diğer bir anlatımla C ve D kesitlerinde mafsalların iki tarafındaki kesitler bir birlerine göre ve B mesnedinde de çubuk ilk konumuna göre dönebilmektedir.



(a) 3.dereceden hiperstatik sistem

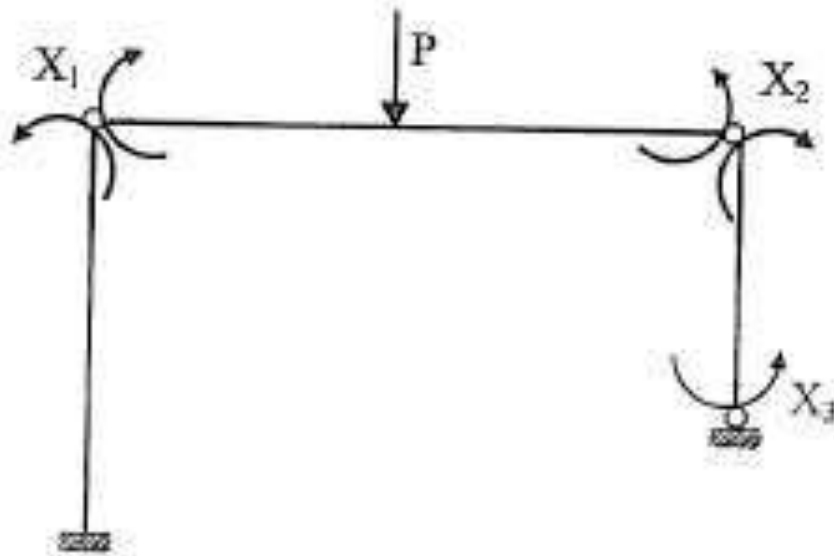


(b) Hiperstatiklik derecesi kadar süreklilik bağı kaldırılarak izostatik hale gelen sistem

Şekil 2.3.2

İzostatik hâle dönüştürülen sistemde artık kesit tesirleri ve mesnet tepkileri denge ve mafsal şartlarından ve bütün yer değiştirmeler de daha önce açıklanan yöntemlerden biri ile hesaplanabilir.

2. Hiperstatik Sistemler



(c) bağları kaldırılan sistemde bu bağlarla ilgili yer değiştirmeleri önleyen kuvvetler (eşdeğer sistem)

Şekil 2.3.2

Bozulan süreklilik ve mesnet şartlarını tekrar eski haline getirebilmek için izostatik sistemi oluştururken konulan mafsalla ve kaldırılan mesnet bağı ile ilgili kuvvetler bunların bulunduğu yerde ve doğrultuda uygulanır (Şekil 2.3.2c) . Şekil 2.3.2'deki örnekte C ve D kesitlerine X_1 ve X_2 kuvvet çiftleri ve B mesnedinde X_3 mesnet momenti uygulanır. Başlangıçta bu değerler bilinmemekle birlikte gerçekte bunlar o kesitlerde meydana gelecek eğilme momentleri ve mesnet momentleridir. Şekil 2.3.2a gösterilen sistemle Şekil 2.3.2c'de gösterilen sistemin bütün statik büyüklükleri aynıdır. Diğer bir anlatımla Şekil 2.3.2c'deki sistem gerçek sistemin eşdeğeridir.

2. Hiperstatik Sistemler

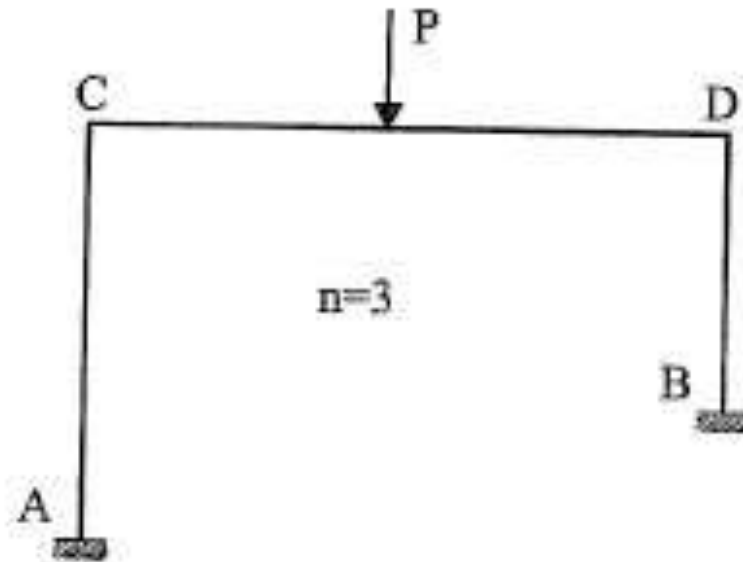
Gerçek sistemde X_1 tatbik noktası ve doğrultusundaki yer değiştirme δ_1 , X_2 'nin tatbik noktası ve doğrultusundaki yer değiştirme δ_2 ve X_3 'ün tatbik noktası ve doğrultusundaki yer değiştirmeyi δ_3 ile gösterelim. Hiperstatik sistemdeki süreklilik şartlarının sağlanabilmesi için $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$ ve $\delta_3 = 0$ olması gerekir. δ_1, δ_2 ve δ_3 yer değiştirmeleri sistemdeki dış kuvvetlere ve X_i değerlerine bağlı olarak yazılarak 3 eşitlik elde edilir ve bu eşitliklerin çözümünden de bilinmeyen X_i değerleri hesaplanır. Aşağıda yöntemde kullanılan terimler ayrı ayrı tanımlanmış ve incelenmiştir.



2. Hiperstatik Sistemler

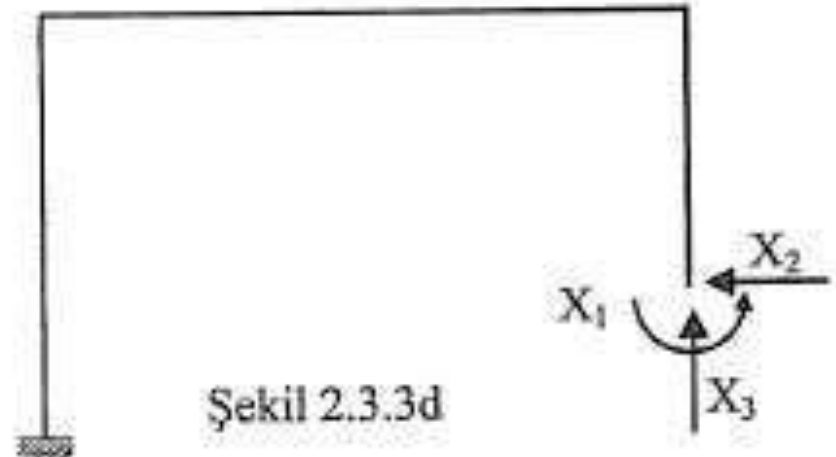
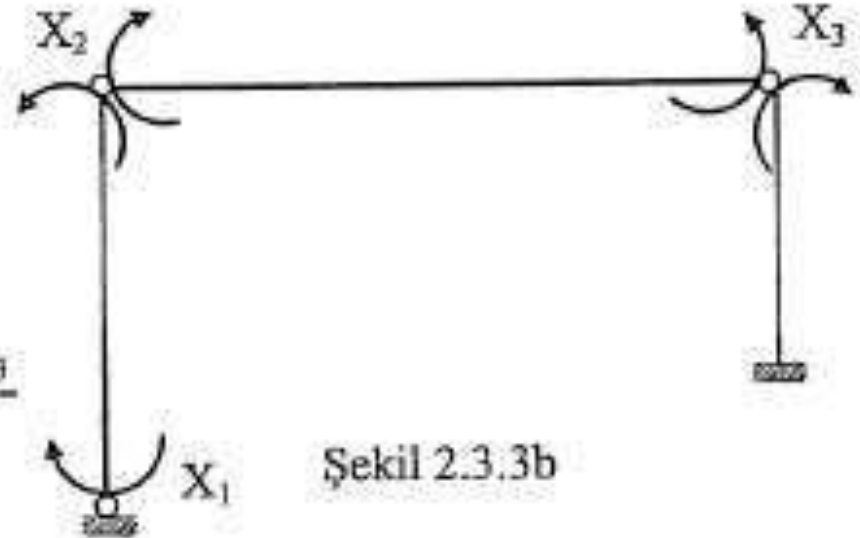
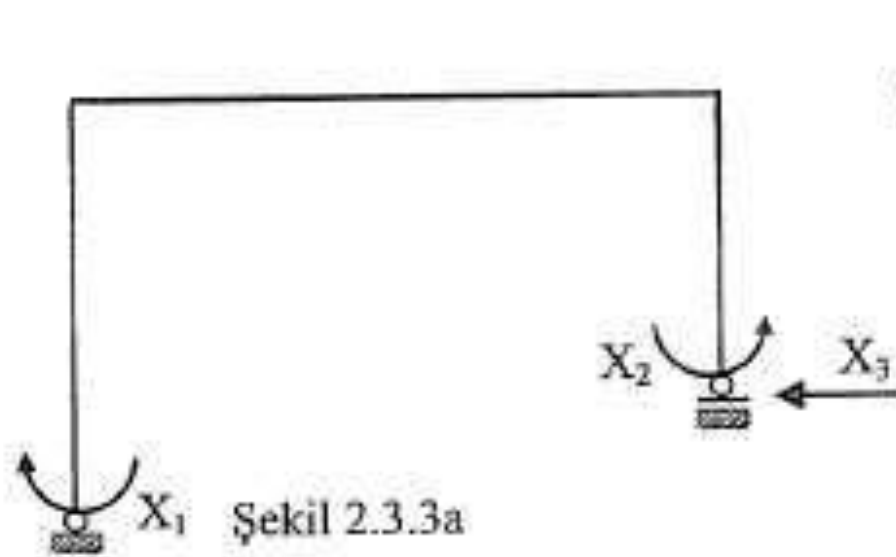
2.3.2.1 İzostatik Esas Sistem

Hiperstatik sistemde uygun yerlere mafsallı olarak veya mesnet bağlantıları kaldırılarak izostatik hale getirilen yüksüz sisteme **izostatik esas sistem** denir. Bir hiperstatik sistem için çok sayıda izostatik esas sistem seçilebilir. Amaç az işlemi gerektiren uygun kesit tesiri diyagramı elde edilecek sistemi seçmektir. Şekil 2.3.2a'daki sistem için Şekil 2.3.3'de değişik izostatik esas sistemler gösterilmiştir.



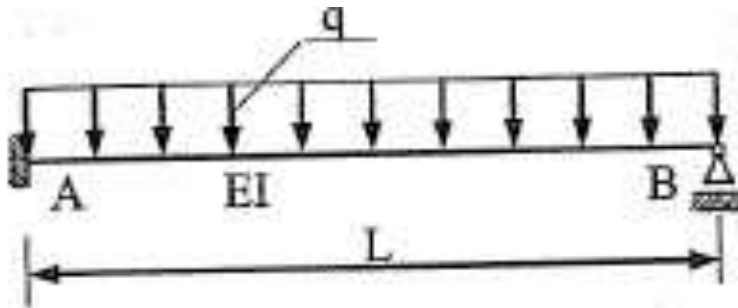
Şekil 2.3.2 (a) 3.dereceden hiperstatik sistem

2. Hiperstatik Sistemler



Şekil 3.2.3 Aynı sistem için değişik izostatik esas sistemler ve hiperstatik bilinmeyen kuvvetler

2. Hiperstatik Sistemler



(a) 1.dereceden hiperstatik sistem



(e) İzostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyen kuvvet

2.3.2.2 Hiperstatik Bilinmeyen Kuvvet

Hiperstatik sistemi izostatik hale getirmek için kaldırılan bağlarla ilgili kesit tesirleri veya mesnet tepkilerine **hiperstatik bilinmeyen kuvvetler** denir. Bunlar genel olarak X ve $a, b, \dots$ gibi harflerle veya $1, 2, \dots$ gibi sayısal alt indislerle gösterilir. Sistemin hiperstatiklik derecesi kadar hiperstatik bilinmeyen kuvvet vardır.

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2.3 Sıfır Yükleme

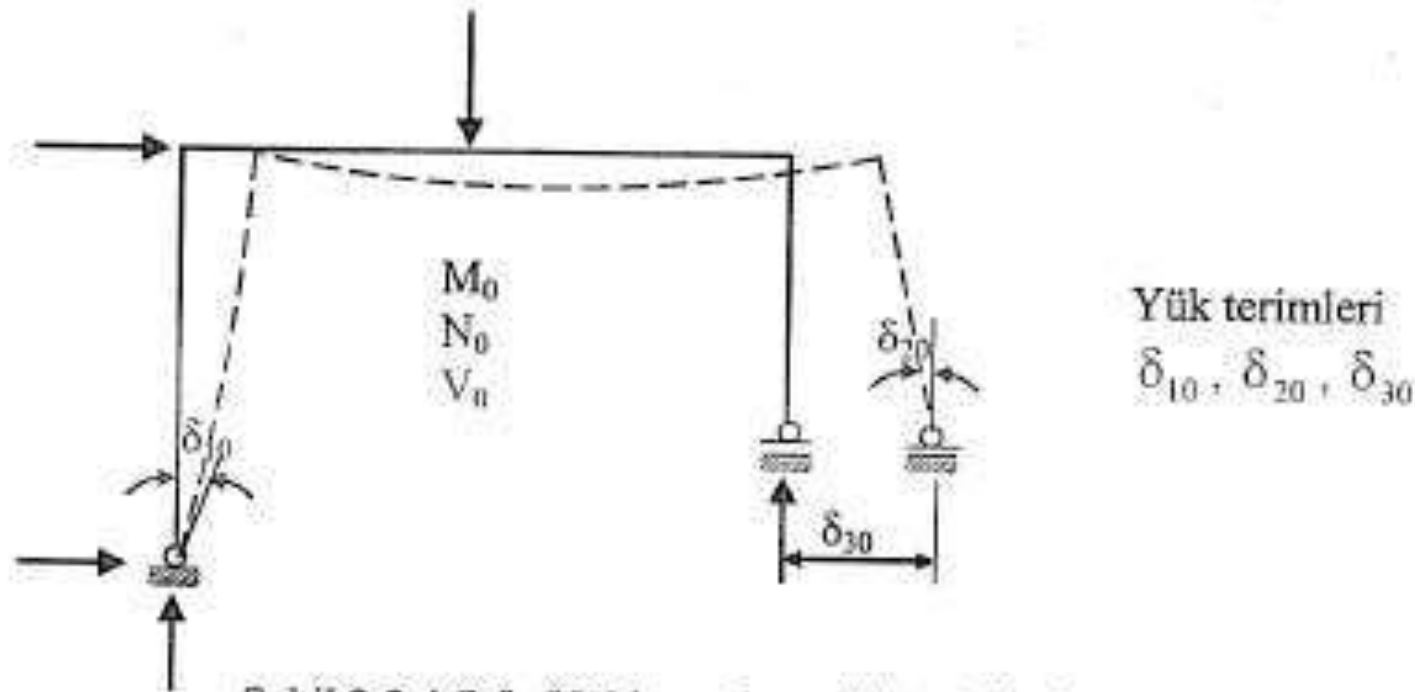
İzostatik esas sistemin sadece yüklerle (kuvvet türü yük, sıcaklık değişimi, mesnet hareketleri v.b) yüklü olması durumuna **sıfır yükleme** denir. Sistemde ne kadar yük çeşidi varsa her bir yük için ayrı bir sıfır yükleme yapılır. Sıfır yüklemesinden meydana gelen statik büyüklükler 0 alt indisi ile gösterilir. Mesnet tepkileri R_{x0} , R_{y0} , M_{L0} , kesit tesirleri M_0 , N_0 , V_0 ve yer değiştirmeler δ_{i0} şeklinde gösterilir. Sıfır yüklemesinden meydana gelen mesnet tepkileri hesaplanır. Kesit tesirleri hesaplanır ve diyagramları çizilir.



2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2.4 Yük Terimleri

İzostatik esas sistemde hiperstatik bilinmeyen kuvvetlerin tatbik notaları ve doğrultularında yüklerden meydana gelen **yer değiştirmelere yük terimleri** denir. Genel olarak δ_{i0} ile gösterilir. Burada 1.indis yeri 2.indis sebebi göstermektedir. Anlamı izostatik esas sistemde X_i hiperstatik bilinmeyen kuvvetin tatbik noktası ve doğrultusunda yüklerden meydana gelen yer değiştirmedir. Şekil 2.3.2a 'da verilen sistemin Şekil 2.3.3a'da seçilen izostatik esas sistem ile ilgili yük terimleri Şekil 2.3.4'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3.4 Sıfır Yükleme ve yük terimleri

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2.5 Birim Yüklemler

Hiperstatik bilinmeyenlere kendi tatbik noktası ve doğrultusunda bir birim değer verilerek izostatik esas sistemin bunların her biri ile ayrı ayrı yüklenmesine **birim yükleme** denir. n inci dereceden hiperstatik sistem için $X_1 = 1, X_2=1, \dots, X_i=1, \dots, X_n=1$ olmak üzere n tane birim yükleme yapılır. Şekil 2.3.5'de 3. dereceden hiperstatik bir sistem için birim yüklemler gösterilmiştir. Bu birim yüklemeden meydana gelen mesnet tepkileri ve iç kuvvetleri o yüklemenin alt indisi ile gösterilir. Örneğin $X_1=1$ yüklemesi için $R_{x1}, R_{y1}, M_1, V_1, N_1$ gibi.



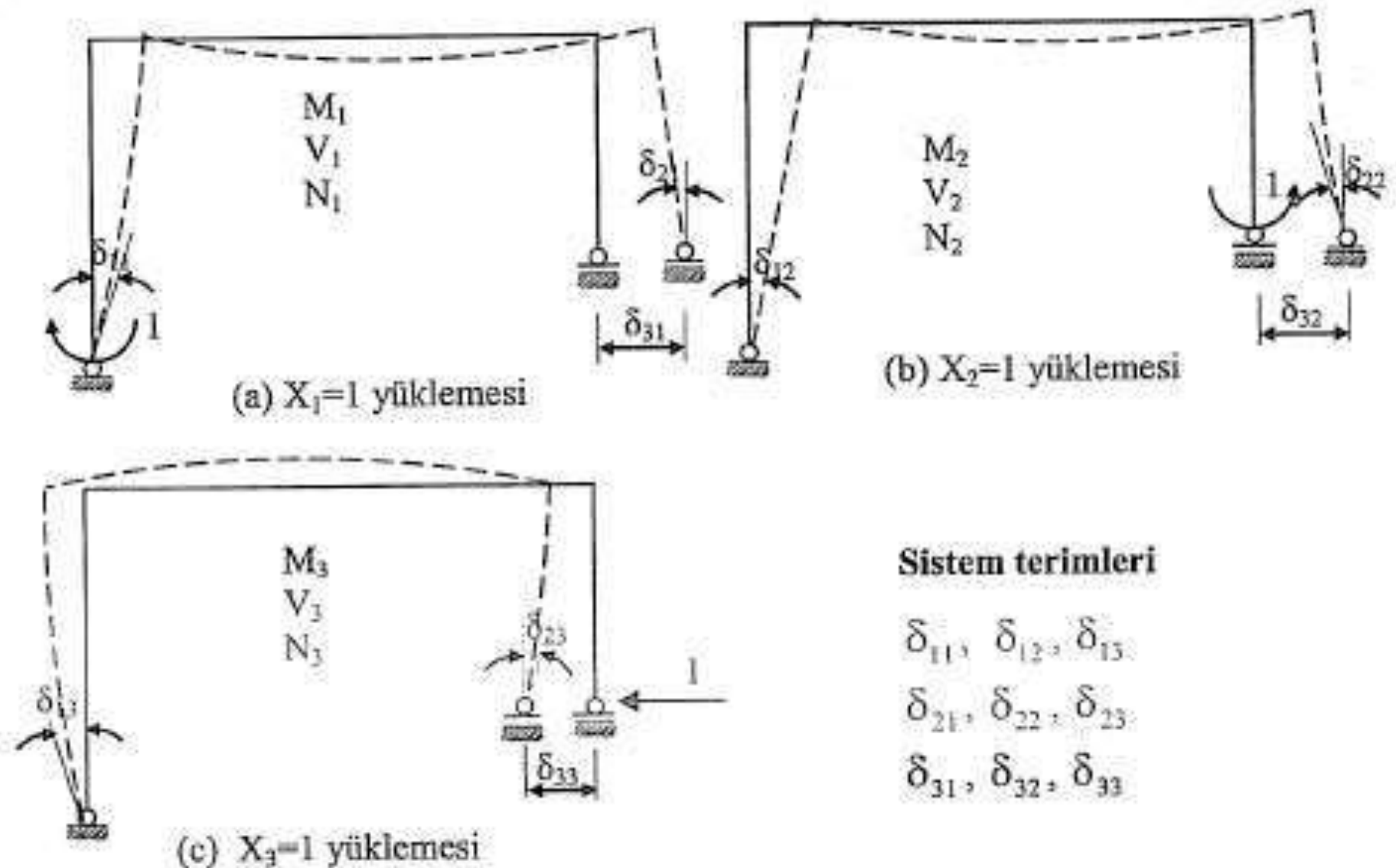
2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2.6 Sistem Terimleri

İzostatik esas sistemde birim yüklemelerden dolayı hiperstatik bilinmeyenlerin tatbik noktaları ve doğrultularında meydana gelen yer değiştirmelere **sistem terimleri** denir. n inci dereceden hiperstatik bir sistem için $n \times n$ adet sistem terimi vardır. Bu sistem terimlerinin yüklerle ilgisi olmayıp sadece izostatik esas sistemin geometrik boyutlarına bağlıdır. Genel olarak δ_{ik} şeklinde gösterilir. Anlamı, İzostatik esas sistemde X_i hiperstatik bilinmeyen kuvvetin tatbik noktası ve doğrultusunda $X_k=1$ yüklemeinden meydana gelen yer değiştirmedir. Görüldüğü gibi 1. indis yeri 2. indis sebebi göstermektedir. Şekil 2.3.5'de, Şekil 2.3.3a'da seçilen izostatik sistem ile ilgili birim yüklemeler ve sistem terimleri gösterilmiştir.



2. Hiperstatik Sistemler



Şekil 2.3.5 Birim yüklemeler ve sistem terimleri

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2.7 Süreklilik Eşitlikleri (Yer Değiştirmelerin Süperpozisyon Eşitlikleri)

Yukarıda da açıklandığı gibi δ_{i0} izostatik esas sistemde X_i 'nin tatbik noktası ve doğrultusunda dış yüklerden meydana gelen yer değiştirme ve δ_{ik} izostatik esas sistemde X_i 'nin tatbik noktası ve doğrultusunda $X_k = 1$ yüklemeinden meydana gelen yer değiştirme olduğuna göre izostatik esas sistemde X_i 'nin tatbik noktası ve doğrultusunda X_k kuvvetinden meydana gelen yer değiştirme

$$\delta_i = X_k \delta_{ik} \quad (2.3.8)$$

olur. Yükler ve diğer tüm hiperstatik kuvvetler beraber göz önüne alındığında hiperstatik sistemde X_i 'nin tatbik noktasında meydana gelecek yer değiştirme

$$\delta_i = \delta_{i0} + X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} \dots + X_l \delta_{il} \dots + X_n \delta_{in}$$

şeklinde yazılır.

2. Hiperstatik Sistemler

Hiperstatik gerçek sistemde süreklilik şartının gerçekleşebilmesi için $\delta_i = 0$ olması gerekir. Bu durumda X_i 'nin tatbik noktası ve doğrultusunda meydana gelecek yer değiştirme için

$$\delta_i = \delta_{i0} + X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} \dots + X_i \delta_{ii} \dots + X_n \delta_{in} = 0 \quad (2.3.10)$$

eşitliği elde edilir. Buna i noktasındaki kesitin **süreklilik eşitliği** veya i 'deki **yer değiştirmenin süperpozisyonu eşitliği** denir. Bu eşitlik n . dereceden hiperstatik bir sistemde $i = 1, i = 2, \dots, i = n$ alınarak

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} \dots + X_i \delta_{1i} \dots + X_n \delta_{1n} = 0$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} \dots + X_i \delta_{2i} \dots + X_n \delta_{2n} = 0$$

$$\delta_i = \delta_{i0} + X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} \dots + X_i \delta_{ii} \dots + X_n \delta_{in} = 0$$

$$\delta_n = \delta_{n0} + X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} \dots + X_i \delta_{ni} \dots + X_n \delta_{nn} = 0 \quad (2.3.11)$$

elde edilir. Bu eşitliklere **süreklilik veya yer değiştirmelerin süperpozisyon eşitlikleri** denir. Bu eşitliklerde yukarıda da açıklandığı gibi δ_{i0} yük terimleri ve δ_{ik} sistem terimleri izostatik esas sistemde virtüel iş eşitliklerinden hesaplanıp yerlerine konularak X_k hiperstatik bilinmeyen kuvvetleri hesaplanır.

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2.8 İç Kuvvetler ve Mesnet Tepkileri İçin Süperpozisyon Eşitlikleri

X_k hiperstatik bilinmeyen kuvvetleri hesaplandıktan sonra hiperstatik sistemin mesnet tepkileri doğrudan denge eşitlikleri ve mafsalları kullanılarak hesaplanabilir. Sıfır yükleme ve birim yüklemelerde bulunan mesnet tepkileri ve iç kuvvetler kullanılarak da bulunabilir.

Sıfır yüklemede meydana gelen mesnet tepkisi R_0 ve herhangi bir kesitteki iç kuvvetler M_0, V_0, N_0 ,

$X_1=1$ yüklemede meydana gelen mesnet tepkisi R_1 ve herhangi bir kesitteki iç kuvvetler M_1, V_1, N_1 ,

$X_i=1$ yüklemede meydana gelen mesnet tepkisi R_i ve herhangi bir kesitteki iç kuvvetler M_i, V_i, N_i ,

$X_n=1$ yüklemede meydana gelen mesnet tepkisi R_n ve herhangi bir kesitteki iç kuvvetler M_n, V_n, N_n ,

bilindiğine

2. Hiperstatik Sistemler

süperpozisyon kuralı da geçerli olduğuna göre hiperstatik sistemin mesnet tepkileri ve kesit tesirleri bunlardan yararlanılarak

$$R = R_0 + X_1 R_1 + X_2 R_2 \dots + X_i R_i \dots + X_n R_n$$

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \dots + X_i M_i \dots + X_n M_n$$

$$V = V_0 + X_1 V_1 + X_2 V_2 \dots + X_i V_i \dots + X_n V_n$$

$$N = N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 \dots + X_i N_i \dots + X_n N_n \quad (2.3.12)$$

yazılır. Bu eşitliklere **kuvvetlerin süperpozisyon eşitlikleri** denir.

2.3.2.9 Yük Terimlerinin Hesabı

Bilindiği gibi sıfır yüklemede hiperstatik bilinmeyenlerin tatbik noktaları ve doğrultularında meydana gelen yer değiştirmelerine yük terimi denir ve δ_{i0} şeklinde gösterilir. Bunlar sisteme etkiyecek dış yükler, sıcaklık farkları, mesnet hareketleri, yapım hataları, rötre v.b gibi tüm yükler için ayrı ayrı hesaplanır. Aşağıda virtüel iş eşitlikleri kullanılarak bu δ_{i0} yük terimlerinin her yük durumu için hesabı ayrı ayrı gösterilmiştir.

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2.9.1 Sabit Kuvvet Türü Yükler

İzostatik esas sistemde bu yükten meydana gelen iç kuvvetler M_0 , V_0 ve N_0

izostatik esas sistemde $X_i=1$ yüklemesinden meydana gelen iç kuvvetler M_i , V_i , N_i

olduğuna göre virtüel iş eşitliği yazılarak

$$\delta_{i0} = \int M_i M_0 \frac{dx}{EI} + \int N_i N_0 \frac{dx}{EA} + \int V_i V_0 \frac{dx}{GA}, \quad (2.3.13)$$

elde edilir. Genel olarak normal kuvvet ve kesme kuvvetinin şekil değiştirme işi eğilme momentinden meydana gelen şekil değiştirme işinin yanında göz ardı edilebilecek kadar az olduğundan bunlar göz önüne alınmadan sadece eğilme momentine bağlı olarak

$$\delta_{i0} = \int M_i M_0 \frac{dx}{EI} \quad (2.3.14)$$

şeklinde yazılabilir.

2. Hiperstatik Sistemler

Elastik mesnetli sistemlerde

İzostatik esas sistemde bu yükten meydana gelen iç kuvvetler M_0, V_0, N_0 , elastik mesnette meydana gelen mesnet tepkisi mesnedin cinsine göre M_{L0}, R_{L0} , izostatik esas sistemde $X_i=1$ yüklemesinden meydana gelen iç kuvvetler M_i, V_i, N_i ve elastik mesnette meydana gelen mesnet tepkisi mesnedin cinsine göre M_{Li}, R_{Li} ve yay katsayıları $k_{L\varphi}$ ve $k_{L\Delta}$ olmak üzere

$$\delta_{i0} = \int M_i M_0 \frac{dx}{EI} + \sum M_{Li} \frac{M_{L0}}{k_{L\varphi}} + \sum R_{Li} \frac{R_{L0}}{k_{L\Delta}} \quad (2.3.15)$$

şeklinde bulunur.



2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2.9.2 Sıcaklık değişimi

İzostatik esas sistemde X_i 'nin tatbik noktası ve doğrultusunda sıcaklık farkından meydana gelen yer değiştirme (yük terimi) δ_{it} ile gösterilir. Bilindiği gibi sıfır yükleme izostatik esas sistemde yapılmaktadır ve izostatik sistemlerde de sıcaklık farkından iç kuvvet meydana gelmez. Sadece şekil değiştirme meydana gelir. Bu durumda şekil değiştirme işi farklı sıcaklık değişiminde $\frac{\alpha_t \Delta t}{h} dx$ şekil değiştirmesi ile $X_i=1$ yüklemeinden meydana gelen M_i eğilme momenti ve üniform sıcaklık değişiminde $\alpha_t t \cdot dx$ şekil değiştirmesi ile $X_i=1$ yüklemeinden meydana gelen N_i normal kuvveti iç iş yapacaktır. Bu belirlemelere göre sıcaklık değişimindeki yük terimleri aşağıda verilmiştir.

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2.9.2.1 Üniform sıcaklık değişimi için yük terimi

$$\delta_{it} = \int N_i \alpha_i t dx \quad (2.3.16)$$

2.3.2.9.2.2 Farklı sıcaklık değişimi için yük terimi

$$\delta_{it} = \int M_i \frac{\alpha_i \Delta t}{h} dx \quad (2.3.17)$$

şeklinde hesaplanır. Sıfır yüklemede sıcaklık değişimlerinden dolayı iç kuvvetler meydana gelmediğinden $M_{0t} = 0$, $N_{0t} = 0$ ve $V_{0t} = 0$ olur ve hiperstatik sistemin mesnet tepkileri ve kesit tesirleri

$$R_t = X_1 R_1 + X_2 R_2 \dots + X_i R_i \dots + X_n R_n$$

$$M_t = X_1 M_1 + X_2 M_2 \dots + X_i M_i \dots + X_n M_n$$

$$V_t = X_1 V_1 + X_2 V_2 \dots + X_i V_i \dots + X_n V_n$$

$$N_t = X_1 N_1 + X_2 N_2 \dots + X_i N_i \dots + X_n N_n \quad (2.3.18)$$

şeklinde hesaplanır.

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2.9.3 Mesnet şartlarının değişmesi (mesnet hareketleri)

İzostatik esas sistemde X_i 'nin tatbik noktası ve doğrultusunda mesnet hareketinden meydana gelen yer değiştirme (yük terimi) δ_{iw} ile gösterilir. Bilindiği gibi sıfır yükleme izostatik esas sistemde yapılmaktadır ve izostatik sistem-

lerde mesnet hareketinden iç kuvvet meydana gelmez. Sadece şekil değiştirme meydana gelir. Bu durumda $\Delta\varphi_L$, Δu_L , Δv_L mesnet hareketleri $X_i=1$ yükleme-sinden meydana gelen M_{Li} , R_{Lui} ve R_{Lvi} mesnet tepkileri ile dış iş yapacaktır. Eşitliğin sağına yazılacak olduğundan - işaretli olacaktır. Buna göre

$$\delta_{iw} = -\sum (M_{Li}\Delta\varphi_L + R_{Lui}\Delta u_L + R_{Lvi}\Delta v_L) \quad (2.3.19)$$

şeklinde yazılır.



2. Hiperstatik Sistemler

2.3.2.10 Sistem terimlerinin hesabı

İzostatik esas sistemde hiperstatik bilinmeyen kuvvetlerin tatbik noktaları ve doğrultularında birim yüklemelerden meydana gelen yer değiştirmelere sistem terimleri denir. Virtüel iş eşitlikleri kullanılarak hesaplanabilir.

$X_i=1$ birim yüklemesinden meydana gelen iç kuvvetler M_i, V_i, N_i

$X_k=1$ birim yüklemesinden meydana gelen iç kuvvetler M_k, V_k, N_k

olduğuna göre izostatik esas sistemde X_i 'nin tatbik noktası ve doğrultusunda $X_k=1$ yüklemesinden meydana gelen yer değiştirme

$$\delta_{ik} = \int M_i M_k \frac{dx}{EI} + \int N_i N_k \frac{dx}{EA} + \int V_i V_k \frac{dx}{GA}, \quad (2.3.20)$$

şeklinde yazılır.

2. Hiperstatik Sistemler

Genel olarak normal kuvvet ve kesme kuvvetinin şekil değiştirme işi eğilme momentinden meydana gelen şekil değiştirme işinin yanında göz ardı edilebilecek kadar az olduğundan bunlar göz önüne alınmadan sadece eğilme momentine bağlı olarak

$$\delta_{ik} = \int M_i M_k \frac{dx}{EI} \quad (2.3.21)$$

şeklinde de yazılabilir. Sistemde elastik mesnetlerin olması durumunda elastik mesnet şekil değiştirme işleri de eklenerek yük terimi

$$\delta_{ik} = \int M_i M_k \frac{dx}{EI} + \sum M_{Li} \frac{M_{Lk}}{k_{L\varphi}} + \sum R_{Li} \frac{R_{Lk}}{k_{L\Delta}} \quad (2.3.22)$$

şeklinde elde edilir.

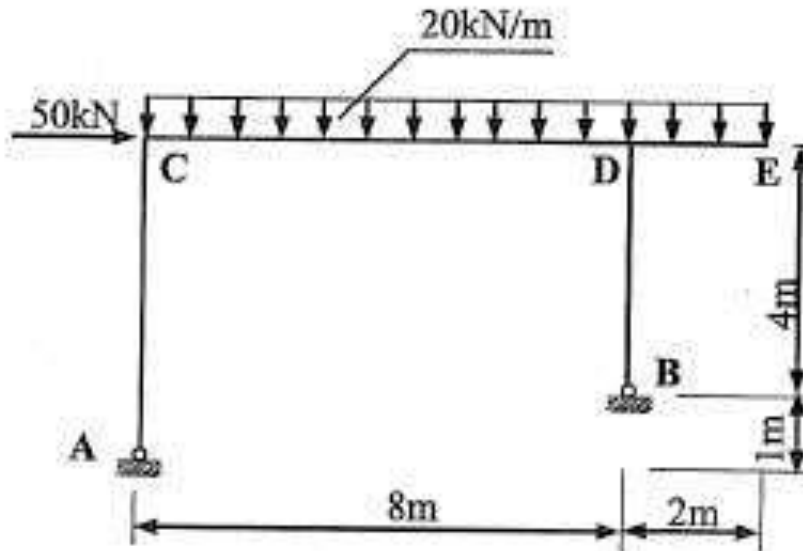
2. Hiperstatik Sistemler

Örnek 2.3.1

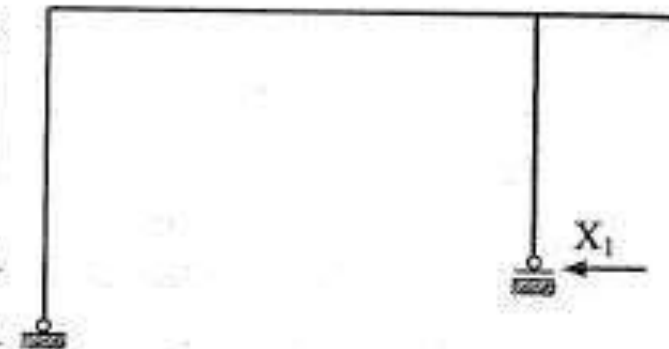
Şekil 2.3.6'da boyutları ve yükleme durumu verilen sistemde $E=2,1 \times 10^7$ kN/m², $G=8,1 \times 10^6$ kN/m², AC çubuğunun boyutu 40/60 cm, CD çubuğunun boyutu 40/80 cm ve BD çubuğunun boyutu 40/50 cm olduğuna göre sistemde:

- (a) Sistem üzerinde bulunan yüklerden
- (b) B mesnedinin yatay ve dışa doğru 1 cm açılmasından
- (c) 25 C° lik üniform sıcaklık değişiminden
- (d) 25 C° lik farklı sıcaklık değişiminden

meydana gelecek kesit tesirlerini hesaplayınız ve diyagramlarını çiziniz.



Şekil 2.3.6



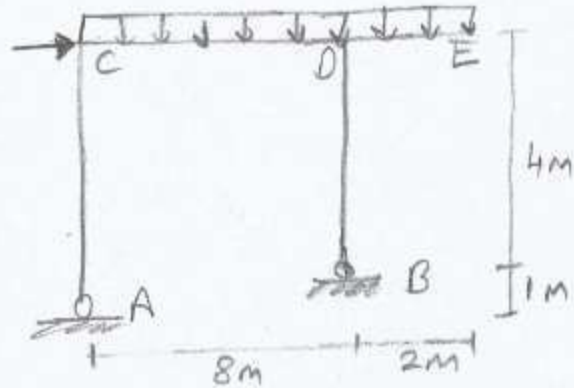
Şekil 2.3.7 İzostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyen kuvvet

2. Hiperstatik Sistemler

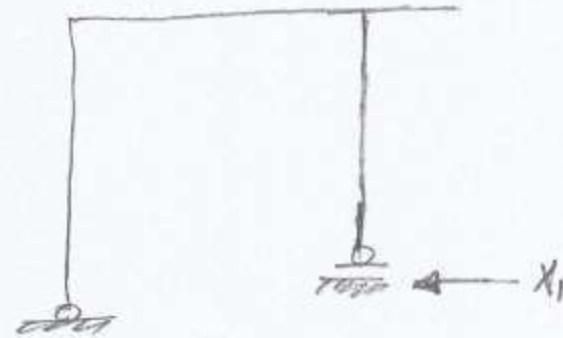
ÖRN 2.3.1

(4)

a) Sistem üzerinde bulunan ysklerden m, N, V



Gercek sistem



İzostatik esas sistem ve
Hiperstatik bilinmeyen kuvvet

Gubukların Atolet Momentleri

$$I_{AC} = \frac{0,4 \times 0,6^3}{12} = 72 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \quad (0,421 I)$$

$$I_{CD} = \frac{0,4 \times 0,8^3}{12} = 171 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \quad (I)$$

$$I_{BD} = \frac{0,4 \times 0,5^3}{12} = 42 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \quad (0,246 I)$$

2. Hiperstatik Sistemler

Gubukların Entesit Alanları

$$A_{AC} = 0,4 \times 0,6 = 0,24 \text{ m}^2 \quad (0,75 A)$$

$$A_{CO} = 0,4 \times 0,8 = 0,32 \text{ m}^2 \quad (A)$$

$$A_{BO} = 0,4 \times 0,5 = 0,20 \quad (0,625 A)$$

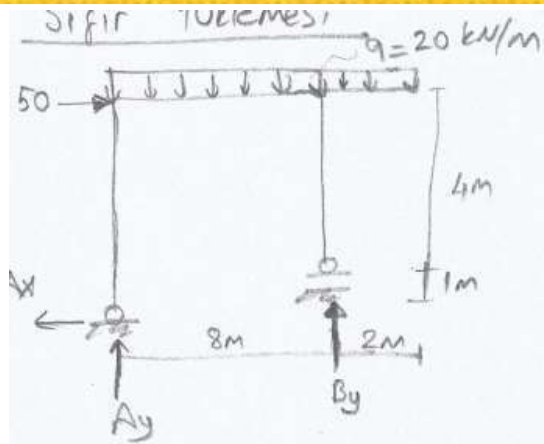
İndirgenmiş Alanlar

$$A'_{AC} = \frac{0,24}{1,2} = 0,20 \text{ m}^2 \quad (0,75 A')$$

$$A'_{CO} = \frac{0,32}{1,2} = 0,267 \text{ m}^2 \quad (A')$$

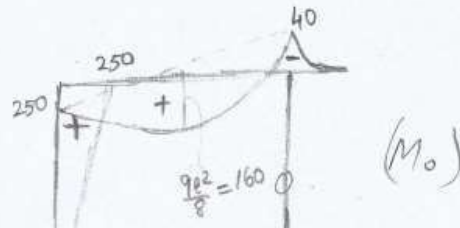
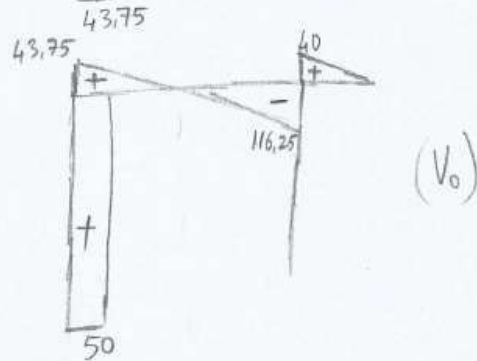
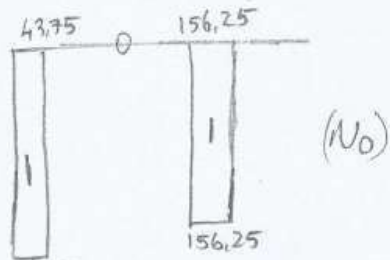
$$A'_{BO} = \frac{0,20}{1,2} = 0,167 \text{ m}^2 \quad (0,625 A')$$

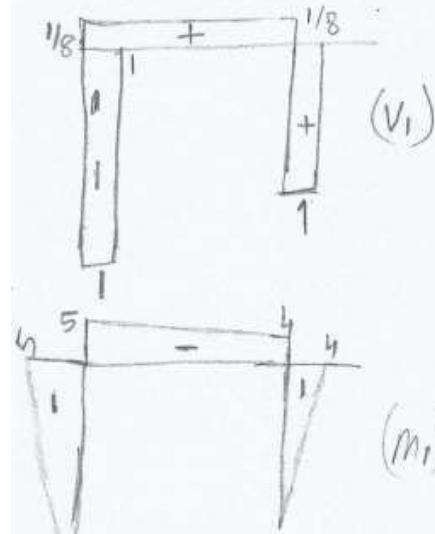
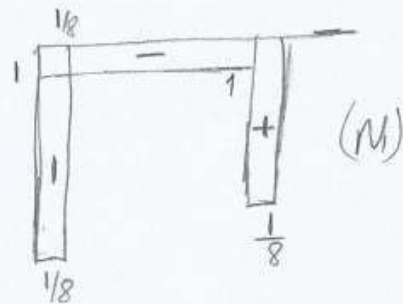
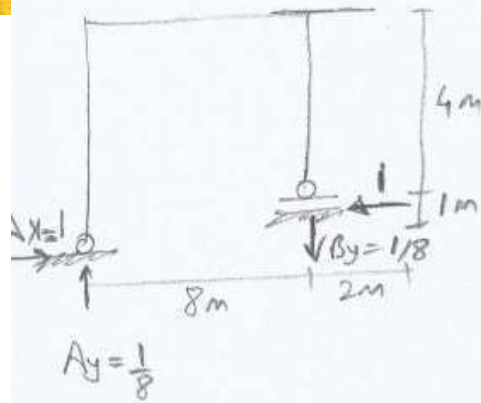
2. Hiperstatik Sistemler



Mesnet Tepkileri

$R_{y \times 8} = 50 \times 5 + 20 \times 10 \times 5$
 $R_y = 156,25 \text{ kN} \uparrow$
 $R_y = 43,75 \text{ kN} \uparrow$
 $R_x = 50 \text{ kN} \leftarrow$





(M)

Meznet Tepkileri

$$8A_y = 1 \times 1 \Rightarrow A_y = \frac{1}{8} \uparrow$$

$$B_y = \frac{1}{8} \downarrow$$

$$A_x = 1$$

Sistemi birinci dereceden hiperstatik oldurundan

$$f_1 = f_{10} + X_1 \cdot f_{11}$$

↓ ↓
virtüel iz virtüel iz tepkileri ile

$$f_{10} = \int M_1 \cdot M_0 \cdot \frac{dx}{EI} + \int N_1 \cdot N_0 \cdot \frac{dx}{EA} + \int V_1 \cdot V_0 \cdot \frac{dx}{GA}$$

$$f_{10} = f_{10M} + f_{10N} + f_{10V}$$

$$f_{10M} = \frac{1}{0,421 EI} \cdot \left(\frac{(250)(1-5) \cdot 5}{3} \right) +$$

$$\left(\frac{1}{EI} \left(\frac{8}{6} \right) \left[250 \cdot (-2 \times 5 - 4) - 40 \cdot (-5 - 2 \times 4) \right] + \right.$$

$$160 \cdot 8 \cdot (-5 - 4) \cdot$$

$$f_{10N} = \frac{1}{0,75EA} \cdot \overbrace{(-43,75) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 5}^{\boxed{} \times \boxed{}} + \frac{1}{0,625EA} \cdot \overbrace{(-156,25) \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 4}^{\boxed{} \times \boxed{}} \quad (7)$$

$$= -\frac{88,54}{EA} = -1,318 \times 10^{-5}$$

$$f_{10V} = \frac{1}{0,75 \times 6A'} \cdot \left(\overbrace{(-1) \cdot 50 \cdot 5}^{\boxed{} \times \boxed{}} \right) + \frac{1}{6A'} \cdot \left(\frac{\left(\frac{1}{8}\right) \cdot 8}{2} \times (43,75 - 116,25) \right)$$

$$= -\frac{337,33}{6A'} - \frac{36,25}{6A'} = -\frac{369,58}{6A'} = -17,888 \times 10^{-5}$$

$$\hookrightarrow 8,1 \times 10^6 \times 0,267 = 2,1627 \times 10^6$$

$$f_{10} = f_{10M} + f_{10N} + f_{10V}$$

$$= -35,538 \times 10^{-3} - 1,318 \times 10^{-5} - 17,888 \times 10^{-5}$$

$$f_{10} = \underline{\underline{-0,03573}}$$

$$\delta_{II} = \underbrace{\int M_1 \cdot M_1 \cdot \frac{dx}{EI}}_{\delta_{II M}} + \underbrace{\int N_1 \cdot N_1 \cdot \frac{dx}{EA}}_{\delta_{II N}} + \underbrace{\int V_1 \cdot V_1 \cdot \frac{dx}{G \cdot A'}}_{\delta_{II V}}$$

$$\delta_{II} = \delta_{II M} + \delta_{II N} + \delta_{II V}$$

$$\delta_{II M} = \frac{1}{0,42 EI} \cdot \left(\frac{(-5) \cdot (-5) \cdot (5)}{3} \right) +$$

$$\frac{1}{EI} \cdot \frac{8}{6} \cdot \left((-5) \cdot [2 \cdot (-5) + (-4)] + (-4) \cdot [2 \cdot (-4) + (-5)] \right) +$$

$$\frac{1}{0,246 EI} \cdot \left[\frac{(-4) \cdot (-4) \cdot (4)}{3} \right]$$

$$= \frac{348,461}{EI} = 0,97037 \times 10^{-3}$$

$$\rightarrow 2,1 \times 10^7 \times 171 \times 10^{-4}$$

⑧

$$f_{IIV} = \frac{1}{0,75EA} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 5 + \frac{1}{EA} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 8 + \frac{1}{0,625EA} \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 4$$

$$= \frac{0,10417}{EA} + \frac{8}{EA} + \frac{0,1}{EA} = \frac{8,20417}{EA} = 12,20858 \times 10^{-6}$$

$\hookrightarrow 2,1 \times 10^7 \times 0,32$

$$f_{IIV} = \frac{1}{0,75GA'} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 5 + \frac{1}{GA'} \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 8 + \frac{1}{0,625GA'} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4$$

$$= \frac{6,67}{GA'} + \frac{0,125}{GA'} + \frac{6,4}{GA'} = \frac{13,195}{GA'} = 6,1012 \times 10^{-6}$$

$\hookrightarrow 8,1 \times 10^6 \cdot 0,267$

$$P_{II} = P_{II M} + P_{II W} + P_{II V}$$

$$= \underset{\%99,25}{0,97037 \times 10^{-3}} + \underset{\%0,125}{12,20858 \times 10^{-7}} + \underset{\%0,625}{6,1012 \times 10^{-6}}$$

$$= 9,7769 \times 10^{-4}$$

Süreklilik Eşitliği

$$P_I = P_{I0} + X_1 P_{II}$$

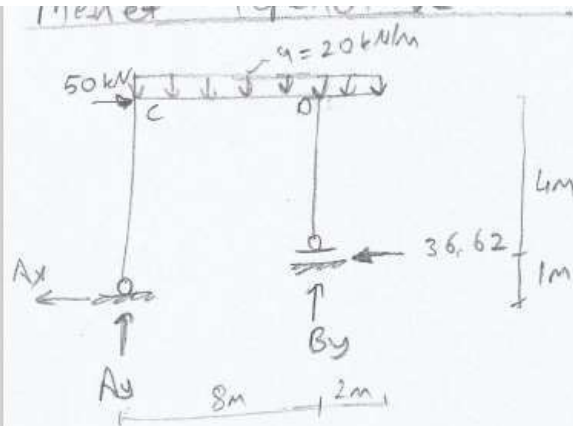
$$0 = -0,03573 + X_1 \cdot (9,7769 \times 10^{-4})$$

$$X_1 = 36,54 \text{ kN}$$

Sadece Eğilme Etkisinde (Kerme ve Normal kuvvetin ihmal edilebilir)

$$X_1 = -\frac{P_{I0 M}}{P_{II M}} = \frac{35,538 \times 10^{-3}}{0,97037 \times 10^{-3}} = 36,62 \text{ kN}$$

↳ Kerme ve Normal kuvvet ihmal edilebilir.



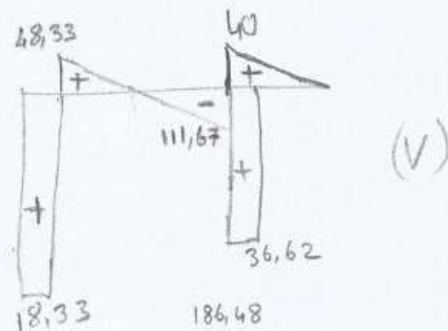
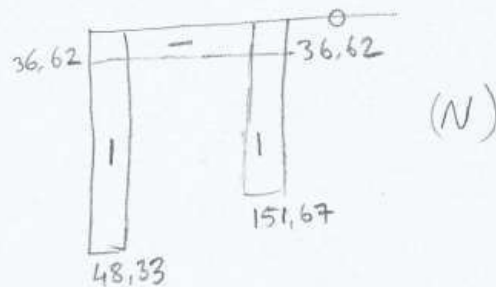
$$\sum M_A = 0$$

$$B_y \times 8 + 36,62 \times 1 = 50 \times 5 + 20 \times 10 \times 5$$

$$B_y = 151,67 \text{ kN} \uparrow$$

$$A_y = 48,33 \text{ kN} \uparrow$$

$$A_x = 13,38$$



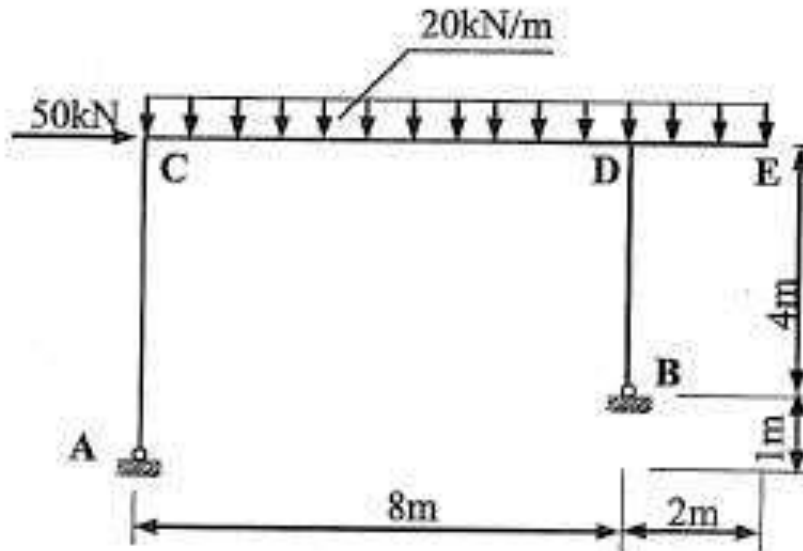
2. Hiperstatik Sistemler

Örnek 2.3.1

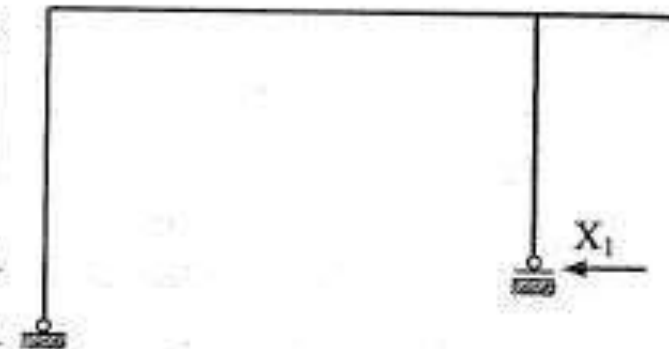
Şekil 2.3.6'da boyutları ve yükleme durumu verilen sistemde $E=2,1 \times 10^7$ kN/m², $G=8,1 \times 10^6$ kN/m², AC çubuğunun boyutu 40/60 cm, CD çubuğunun boyutu 40/80 cm ve BD çubuğunun boyutu 40/50 cm olduğuna göre sistemde:

- (a) Sistem üzerinde bulunan yüklerden
- (b) B mesnedinin yatay ve dışa doğru 1 cm açılmasından
- (c) 25 C° lik üniform sıcaklık değişiminden
- (d) 25 C° lik farklı sıcaklık değişiminden

meydana gelecek kesit tesirlerini hesaplayınız ve diyagramlarını çiziniz.



Şekil 2.3.6



Şekil 2.3.7 İzostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyen kuvvet

b) B Mesnedinin yatay ve Dişo Doprü 1cm aailnos (10)

$$\Delta_{Bu} = 1 \text{ cm}$$

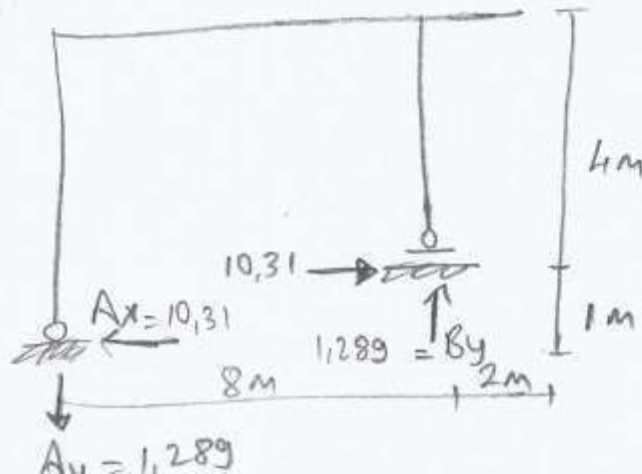
$$\begin{aligned} f_{1w} &= -\Delta_{Bu} \cdot R_{Bx1} \\ &= -(0,01) \cdot 1 = 0,01 \end{aligned}$$

$$f_{1w} + f_{11} \cdot X_{1w} = 0$$

$$X_{1w} = -\frac{0,01}{f_{11}} = -\frac{0,01}{9,7769 \times 10^{-4}} = -10,23 \text{ kN}$$

N ve V pö7 övne alınması durumunda

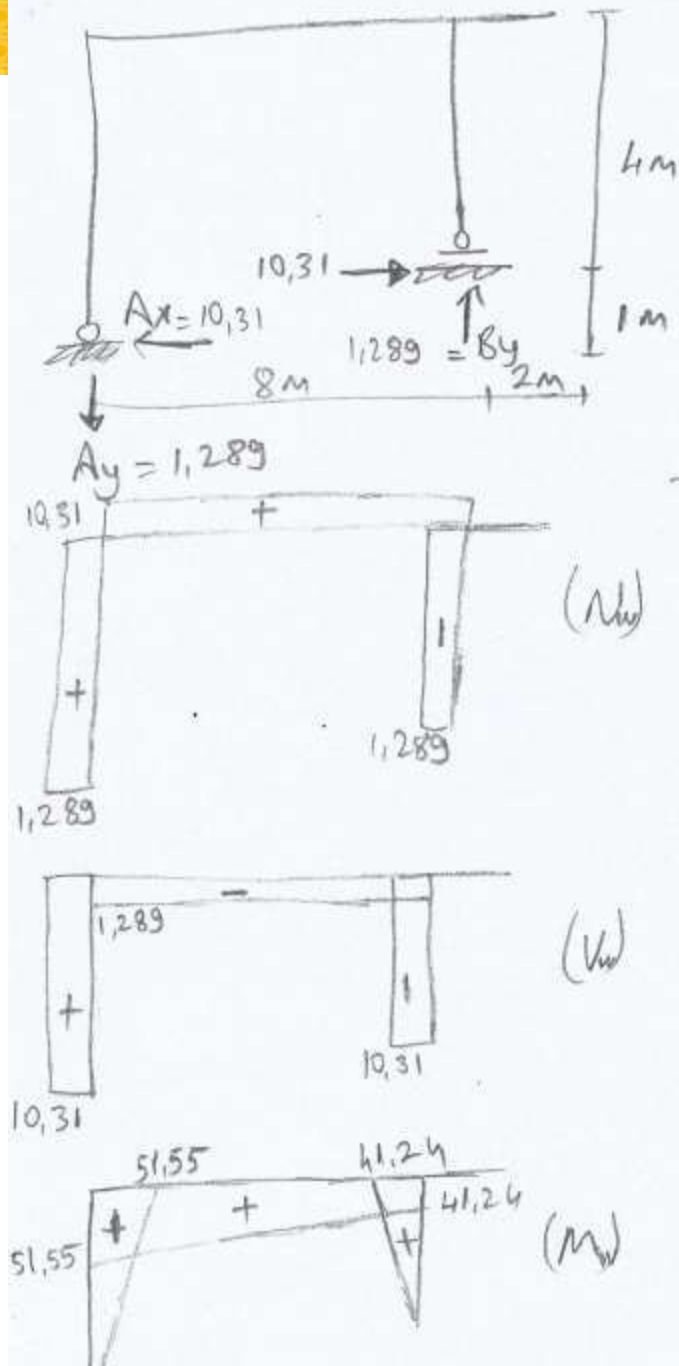
$$X_{1w} = -\frac{f_{1w}}{f_{11}} = \frac{-0,01}{0,97037 \times 10^{-3}} = -10,31 \text{ kN} \quad (\text{B17 bunu alalım!!})$$



$$10,31 \times 1 = R_{By} \cdot 8 \Rightarrow R_{By} = 1,289 \text{ kN} \uparrow$$

$$R_{Ay} = 1,289 \text{ kN} \downarrow$$

$$R_{Ax} = 10,31 \text{ kN} \leftarrow$$



$$10,31 \times 1 = R_{By} \cdot 8 \Rightarrow R_{By} = 1,289 \text{ kN}$$

$$R_{Ay} = 1,289 \text{ kN} \downarrow$$

$$R_{Ax} = 10,31 \text{ kN} \leftarrow$$

Mern et Horeketinden
Meydana Gelen
Kesit Testirleri

c) Uniform Sıcaklık Değişimi

(11)

$$\delta_{it} = \int N_i \cdot \underbrace{dt}_{10^{-5} \times 25 = 25 \times 10^{-5}} \cdot dx = \delta_{it} = 25 \times 10^{-5} \int N_i \cdot dx$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 25 \times 10^{-5} \times 5}_{AC \text{ aralığı}} + \underbrace{(-1) \times 25 \times 10^{-5} \times 8}_{CD \text{ aralığı}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8}\right) \times 25 \times 10^{-5} \times 4}_{BD \text{ aralığı}}$$

$$\delta_{it} = -203,125 \times 10^{-5}$$

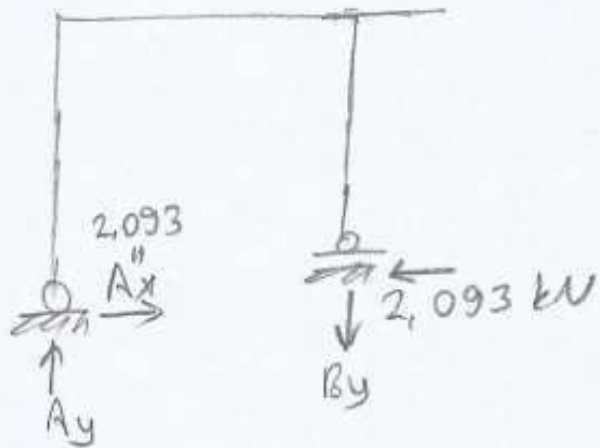
$$\delta_{it} + \delta_{ii} \cdot X_{it} = 0$$

$$X_{it} = \frac{-\delta_{it}}{\delta_{ii}} = - \frac{(-203,125 \times 10^{-5})}{(0,97037 \times 10^{-3})} = 2,093 \text{ kN}$$

(Sade m'den)

$$X_{it} = \frac{-\delta_{it}}{\delta_{ii}} = - \frac{(-203,125 \times 10^{-5})}{(9,7769 \times 10^{-4})} = 2,077 \text{ kN}$$

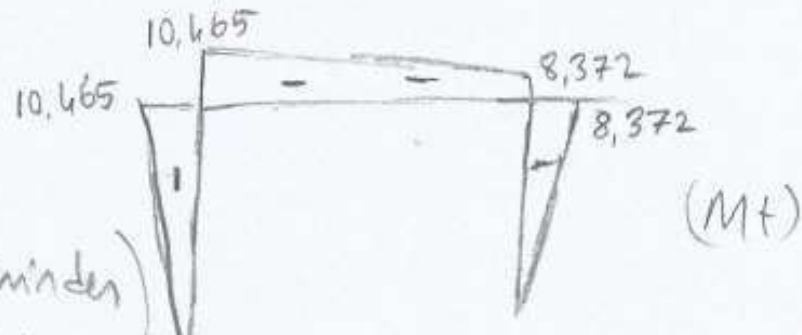
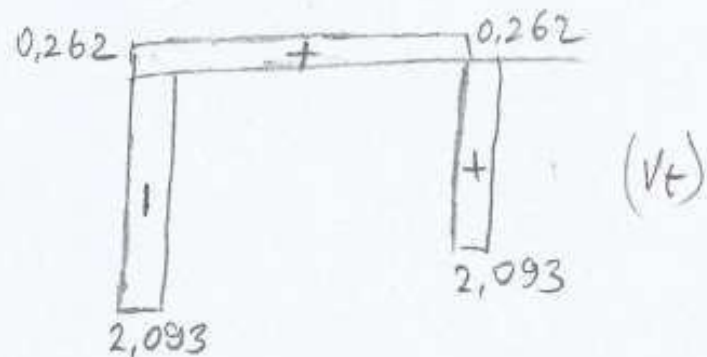
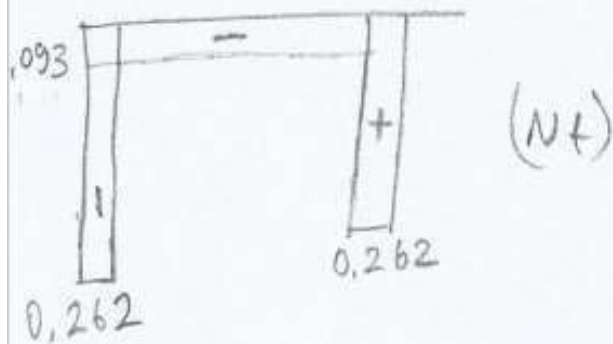
↳ (N ve V'ın poz önüne alınır)



$$B_y \times 8 = 2,093 \times 1$$

$$B_y = 0,262 \text{ kN} \downarrow$$

$$A_y = 0,262 \text{ kN}$$



(Uniform secondary deflections)

$$\delta_{i\Delta t} = \int M_i \cdot \frac{\Delta t \cdot \Delta t}{h} \cdot dx$$

$$\Delta t = t_0 - t_{\text{ü}} = 25 \text{ s} \quad \Delta t = 10^{-5}$$

$$\Delta t \cdot \Delta t = 25 \times 10^{-5}$$

$$\delta_{i\Delta t} = \int M_i \cdot \frac{25 \times 10^{-5}}{h} \cdot dx \Rightarrow \text{integral gerpin tabelu}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(-5) \cdot (25 \times 10^{-5})}{0,6} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-5-4) \cdot \frac{25 \times 10^{-5}}{0,8} \times 8$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot \left(\frac{25 \times 10^{-5}}{0,5} \right) \times 4$$

$$= -2,046 \times 10^{-2}$$

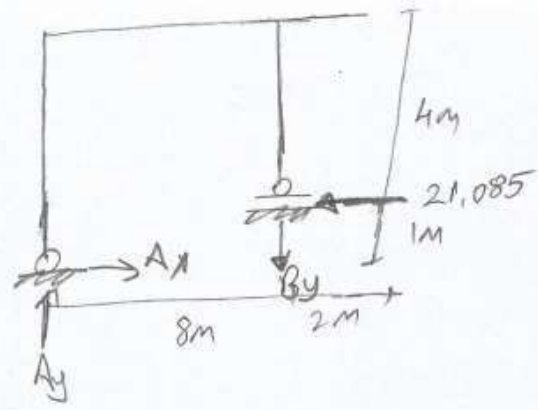
$$\delta_{i\Delta t} + \delta_{ii} X_{i\Delta t} = 0$$

$$X_{i\Delta t} = - \frac{-2,046 \times 10^{-2}}{(0,97037 \times 10^{-3})} = 21,085 \text{ kN} \uparrow$$

(sode m' den)

$$X_{i\Delta t} = - \frac{-2,046 \times 10^{-2}}{(9,7769 \times 10^{-4})} = 20,927 \text{ kN} \uparrow$$

(N ve U de solik)

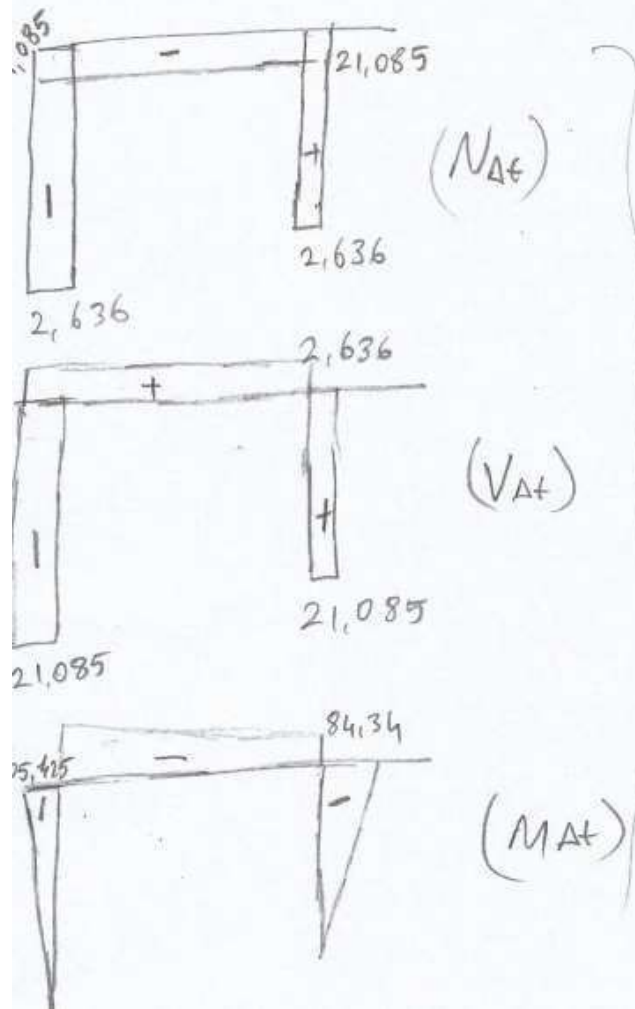


$$A_y \times 8 = 21,085 \times 1$$

$$A_y = 2,636 \text{ kN} \uparrow$$

$$B_y = 2,636 \text{ kN} \downarrow$$

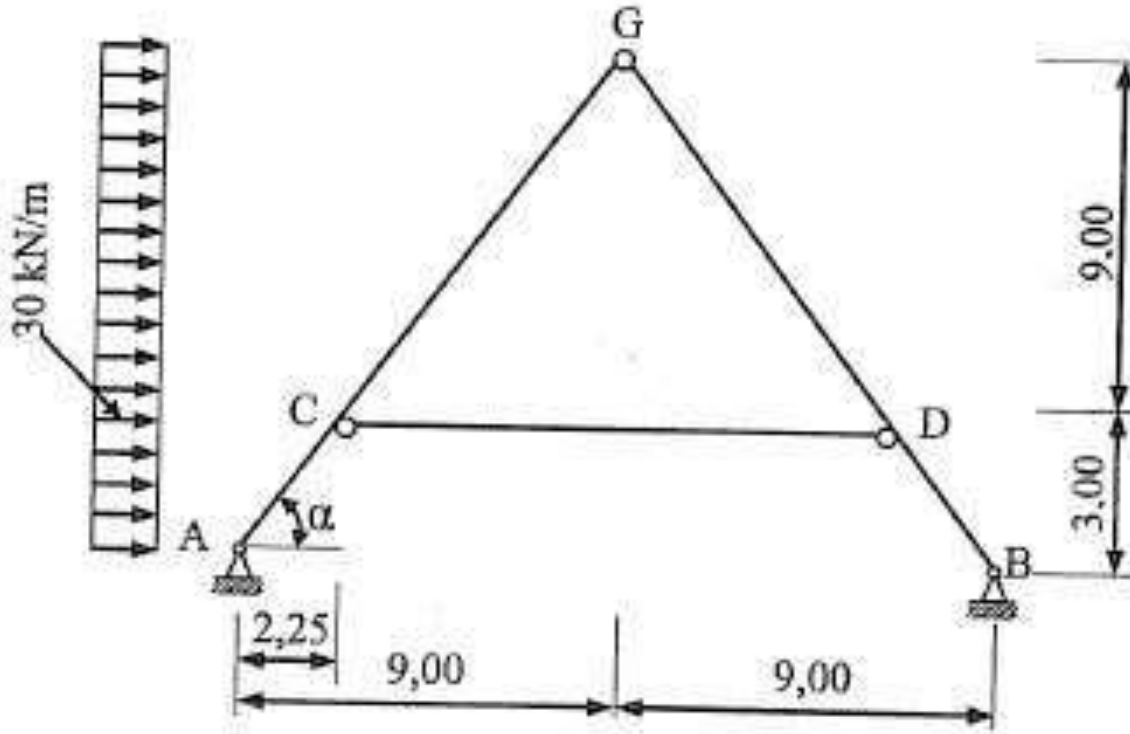
$$A_x = 21,085 \rightarrow$$



Farklı ısı depisiminde
kesit tesiri diyagramı

Örnek 2.3.2

Şekil 2.3.13a'da boyutları ve yükleme durumu verilen çerçevede CD gergi çubuğu çelik olup alanı 15 cm^2 'dir. Çerçevenin geneli C25 betonundan yapılmıştır. AG ve BG çubuğunun atalet momenti 312500 cm^4 'dir.



Şekil 2.3.13.a



İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yapı Statik II Dersi

Dr. Öğr. Üyesi Müslüm Murat MARAŞ

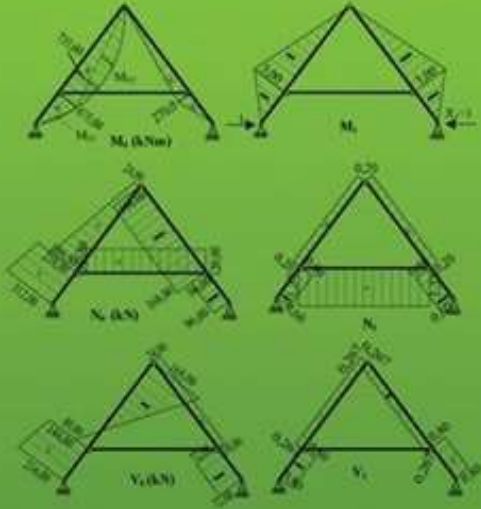
Malatya - 2022

Kaynaklar

BİRSEN YAYINEVİ

YAPI STATİĞİ II

YAPI SİSTEMLERİNDE YER DEĞİŞTİRMELERİN
VE
HİPERSTATİK SİSTEMLERİN
HESAP YÖNTEMLERİ



Prof. İbrahim EKİZ

GÜNCELLESTİRİLMİŞ
3.
BASKI

YAPI STATİĞİ II

Yapı Sistemlerinde Yer
Değiş-tirmelerin Ve Hiperstatik
Sistemlerin Hesap Yöntemleri

Prof. Dr. İbrahim EKİZ

2. Hiperstatik Sistemler

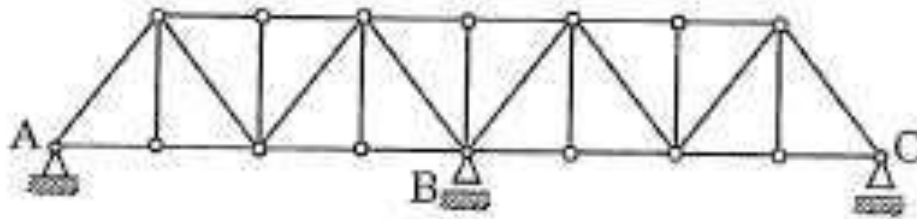
2.3.5 Hiperstatik Kafes Sistemlerin Kuvvet Yöntemi İle Çözümü

Kafes sistemlerde düğüm noktaları mafsallı ve yüklerde düğüm noktalarına etki olduğundan her çubukta $M = 0$ ve $V = 0$ olur ve sadece N normal kuvveti bulunur. Bu bakımdan sistemde kaldırılan her çubuk sistemin hiperstatiklik derecesini bir azaltır. Bunun için izostatik esas sistemi elde ederken hiperstatiklik derecesi kadar bazı mesnet bağları ile bazı çubuklar veya sadece hiperstatiklik derecesi kadar çubuk kaldırılır.

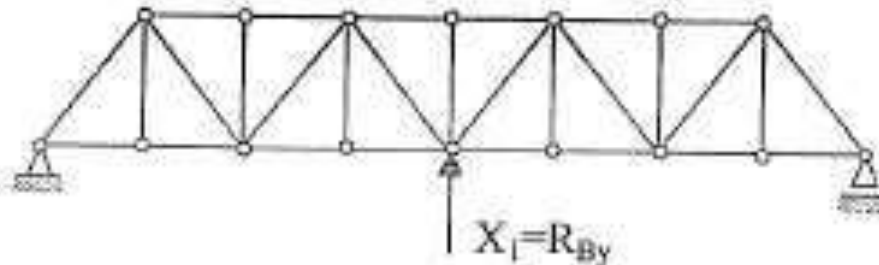


2. Hiperstatik Sistemler

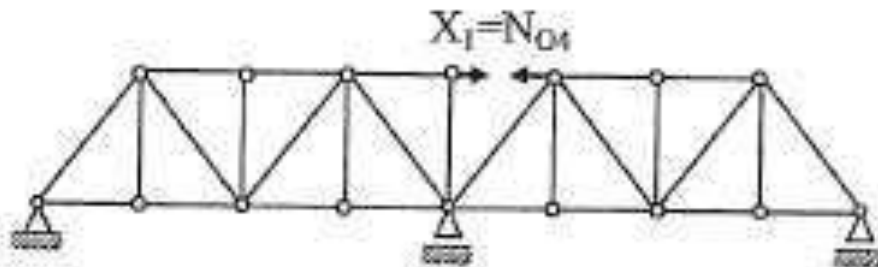
Şekil.2.3.19a'da verilen sistem 1. dereceden hiperstatiktir. Şekil 2.3.19b'de görüldüğü gibi B mesnedindeki düşey bağ kaldırılarak izostatik esas sistem teşkil edilir. Hiperstatik bilinmeyen kuvvet olarak da bu mesnetteki düşey mesnet tepkisi alınır ($X_1=R_{By}$). Aynı sistem için şekil 2.3.19c'de görüldüğü gibi O_4 çubuk kuvveti kaldırılarak izostatik esas sistem elde edilir ve hiperstatik bilinmeyen kuvvet O_4 çubuk kuvveti olur ($X_1=N_{O4}$).



(a) Gerçek sistem
(1.dereceden hiperstatik)



(b) 1. İzostatik esas sistem
ve hiperstatik bilinmeyen

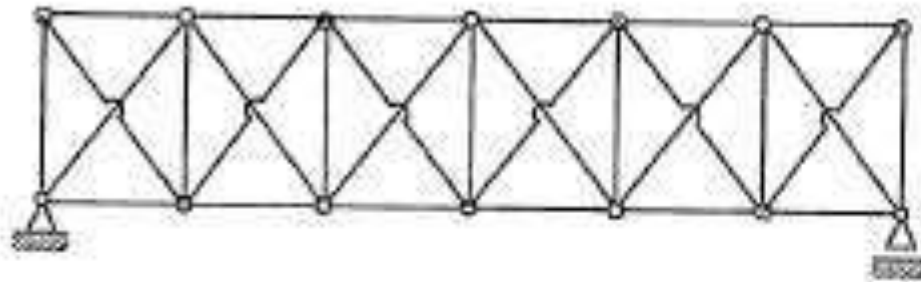


(c) 2. İzostatik esas sistem
ve hiperstatik bilinmeyen

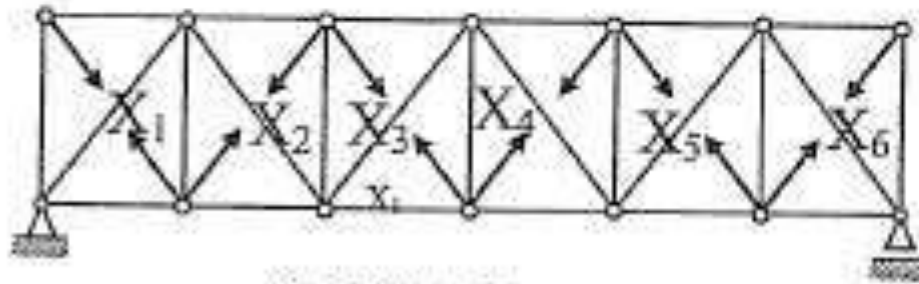
Şekil 2.3.19

2. Hiperstatik Sistemler

Şekil 2.3.20a'da görülen çapraz bağlantılı kafes kiriş dıştan izostatik içten 6. dereceden hiperstatik bir sistemdir. Şekil 2.3.20b'de görüldüğü gibi 6 tane çubuk kaldırılarak izostatik esas sistem oluşturulmuştur. Hiperstatik bilinmeyenler de bu çubuk kuvvetleridir.



(a) Gerçek sistem
(6.dereceden hiperstatik)

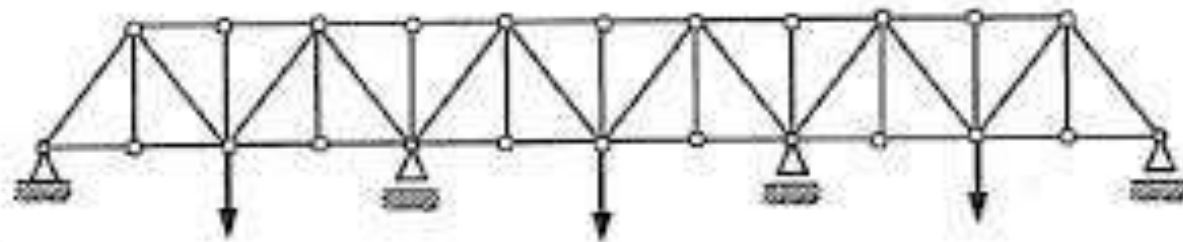


(b) İzostatik esas sistem ve
hiperstatik bilinmeyenler

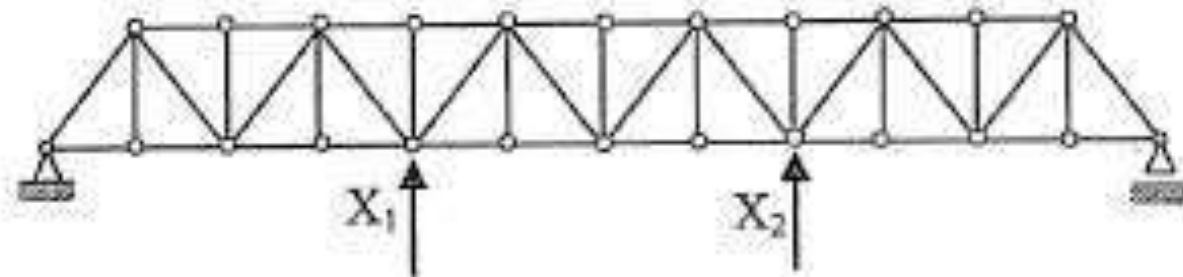
Şekil 2.3 20

2. Hiperstatik Sistemler

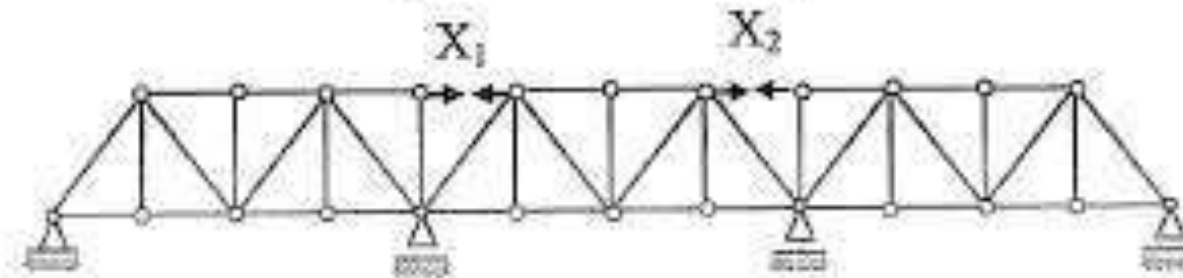
Şekil 2.3.21a'da verilen 3 açıklıklı sürekli kafes kiriş 2. dereceden hiperstatik bir sistemdir. Bu sistem şekil 2.3.21b'de görüldüğü gibi ortadaki iki mesnet bağı kaldırılarak veya şekil 2.3.21c'de görüldüğü gibi iki çubuğu kaldırılarak izostatik sistem oluşturulur.



(a) 2.dereceden hiperstatik gerçek sistem



(b) ortadaki mesnet bağı kaldırılarak oluşturulan izostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyenler (1)

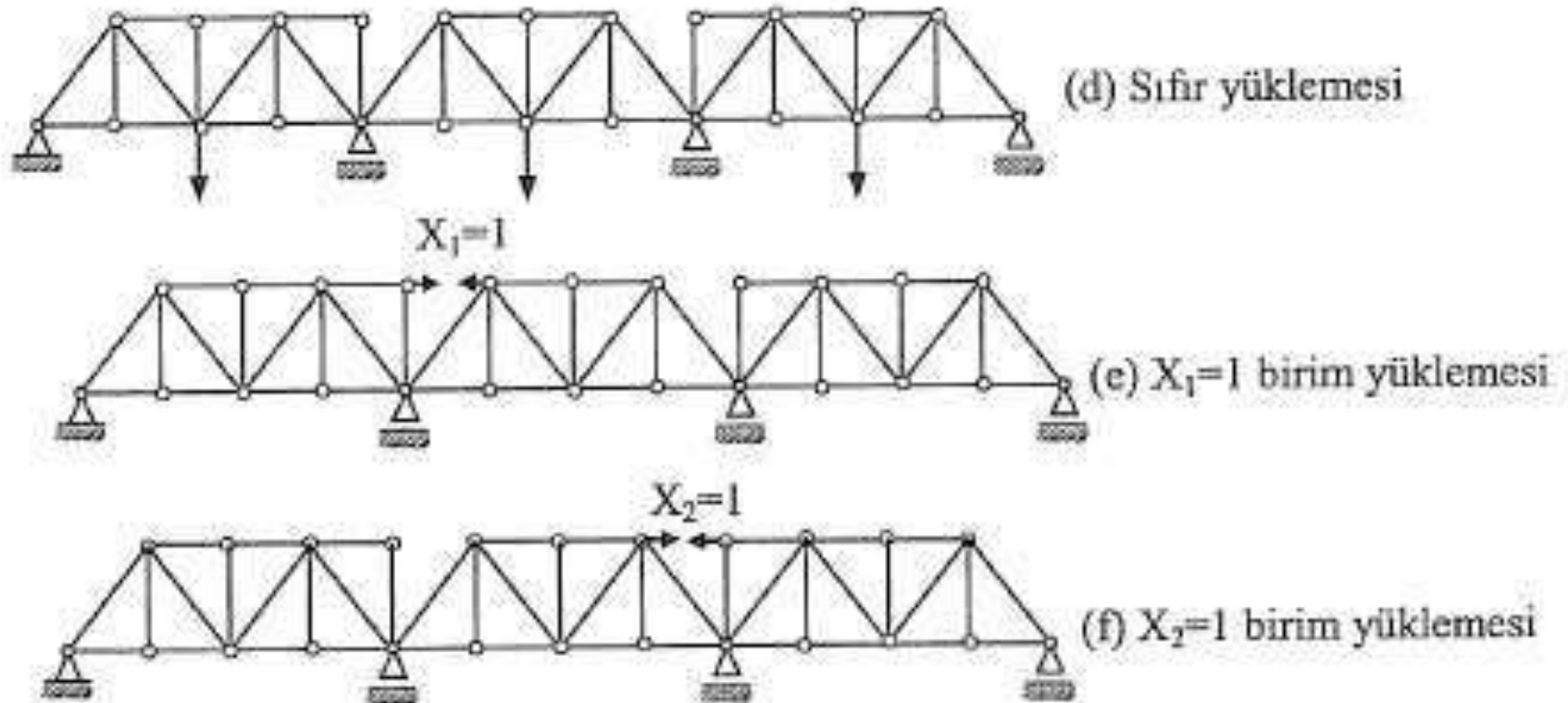


(c) O_4 ve O_7 çubukları kaldırılarak oluşturulan izostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyenler (2)

Şekil 2.3.21

2. Hiperstatik Sistemler

Şekil 2.3.21d'de iki çubuğu kaldırılarak oluşturulan izostatik sistemdeki sıfır yükleme ve Şekil 2.3.21e ve f'de birim yüklemeler gösterilmiştir.



Şekil 2.3.21

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.5.1 Yük Terimleri

2.3.5.1.1.Dış yüklerden

Kafes sistemlerde $M_0 = V_0 = 0$ ve $M_i = V_i = 0$ olduğundan sıfır yüklemede X_i 'nin tatbik noktası ve doğrultusunda meydana gelen yer değiştirme

$$\delta_{i0} = \int N_0 N_i \frac{dx}{EA} \quad (2.3.55a)$$

olarak yazılır. Burada N_0 , N_i , A ve E çubuk boyunca sabit olduğundan integralin dışına alınarak bir çubuk için

$$\delta_{i0} = \frac{N_0 N_i}{EA} \int_0^L dx = N_0 N_i \frac{L}{EA} \quad (2.3.55b)$$

şeklinde bulunur.



2. Hiperstatik Sistemler

Burada

A_n : n. çubuk alanı

φ : çubuk sayısı

n : çubuk nosu

L_n : n. çubuk buyu

N_{n0} : n. çubukta sıfır yüklemeinden meydana gelen normal kuvvet

N_{ni} : n. çubukta $X_i=1$ birim yüklemeinden meydana gelen normal kuvvet

ile gösterilirse, sistemde φ sayıda çubuk bulunduğundan tüm sistem için

$$\delta_{i0} = \sum_{n=1}^{\varphi} N_{n0} N_{ni} \frac{L_n}{EA_n} \quad (2.3.55c)$$

şeklinde yazılır.

2. Hiperstatik Sistemler

Sistemde elastik mesnetlerin olması durumu

R_{Lo} : sıfır yüklemede L mesnedinde meydana gelen mesnet tepkisi,

R_{Li} : $X_i = 1$ yüklemede L mesnedinde meydana gelen mesnet tepkisi,

r : elastik mesnet sayısı

$k_{\Delta L}$: L mesnedinin elastik yay katsayısı

olmak üzere

$$\delta_{i0} = \sum_{n=1}^g N_{n0} N_{ni} \frac{L_n}{EA_n} + \sum_{L=1}^r R_{Lo} R_{Li} \frac{1}{k_{\Delta L}} \quad (2.3.56)$$



2. Hiperstatik Sistemler

2.3.5.1.2. Sıcaklık değişimi

Sistemin çubuklarında sadece N normal kuvvet bulunduğundan üniform sıcaklık değişimi iş yapacak ve farklı sıcaklık değişimi iş yapmayacaktır. Bu durumda sadece üniform sıcaklık değişiminden dolayı sıfır yüklemede X_i 'nin tatbik noktasında ve doğrultusunda yer değiştirme meydana gelecektir. Bu yer değiştirmenin değeri bir n çubuğunda

$$\delta_{i0} = \delta_{it} = \int_0^{L_n} \alpha_t t N_{ni} dx = \alpha_t t N_{ni} L_n \quad (2.3.57)$$

ve tüm sistemde

$$\delta_{it} = \sum_{n=1}^e \alpha_t t N_{ni} L_n \quad (2.3.58)$$

şeklinde bulunur.

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.5.1.3. Mesnet şartlarının değişmesi

Mesnet hareketlerinden dolayı izostatik sistemde X_i 'nin tatbik noktası ve doğrultusunda meydana gelen yer değiştirme

$$\delta_{i0} = \delta_{iw} = - \left(\sum_{L=1}^r \Delta v_L R_{yLi} + \sum_{L=1}^r \Delta u_L R_{xLi} \right) \quad (2.3.59)$$

şeklinde yazılır.

2.3.5.2 Sistem terimleri

Kafes sistemlerde $M_i = V_i = 0$ olduğundan $X_k = 1$ yüklemede X_i 'nin tatbik noktası ve doğrultusunda meydana gelen yer değiştirme

$$\delta_{ik} = \int N_k N_i \frac{dx}{EA} \quad (2.3.60a)$$

olarak yazılır.

2. Hiperstatik Sistemler

Burada N_i , N_k , A ve E çubuk boyunca sabit olduğundan integralin dışına alınarak bir çubuk için

$$\delta_{ik} = \frac{N_k N_i}{EA} \int_0^L dx = N_k N_i \frac{L}{EA} \quad (2.3.60b)$$

ve φ sayıda çubuk bulunan sistemin tümü için

$$\delta_{ik} = \sum_{n=1}^{\varphi} N_{nk} N_{ni} \frac{L_n}{EA_n} \quad (2.3.60c)$$

elastik mesnet bulunan sistemlerde

$$\delta_{ik} = \sum_{n=1}^{\varphi} N_{nk} N_{ni} \frac{L_n}{EA_n} + \sum_{L=1}^r R_{Lk} R_{Li} \frac{1}{k_{\Delta L}} \quad (2.3.61)$$

şeklinde yazılır.

[illegible]

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.5.4 Süperpozisyon eşitlikleri

2.3.5.4.1 Dış yükler

n çubuğunda dış yükler etkisinde izostatik sistemde meydana gelen çubuk kuvveti N_{n0} , birim yüklemelerden izostatik esas sistemde meydana gelen çubuk kuvvetleri N_{n1} , N_{n2} , ... N_{ni} , ... N_{nk} olduğuna göre gerçek sistemde bu çubuk kuvvetinin değeri

$$N_n = N_{n0} + X_1 N_{n1} + X_2 N_{n2} + \dots X_i N_{ni} + \dots X_k N_{nk} \quad (2.3.62)$$

olur.

2.3.5.4.2 Sıcaklık değişimi

Üniform sıcaklık değişimi izostatik esas sistemde çubuk kuvveti meydana gelmez. Bu durumda hiperstatik bilinmeyen kuvvetleri X_{1t} , X_{2t} , ... X_{it} , ... X_{kt} ile gösterirsek çubuk kuvveti

$$N_{nt} = X_{1t} N_{n1} + X_{2t} N_{n2} + \dots X_{it} N_{ni} + \dots X_{kt} N_{nk} \quad (2.3.63)$$

eşitliğinden bulunur.

2. Hiperstatik Sistemler

2.3.5.4.3 Mesnet hareketi

Mesnet hareketlerinden de izostatik sistemde iç kuvvet meydana gelmez. Bu bakımdan hiperstatik bilinmeyen kuvvetleri $X_{1w}, X_{2w}, \dots, X_{jw}, \dots, X_{nw}$ ile gösterirsek n çubuğundaki kuvvet

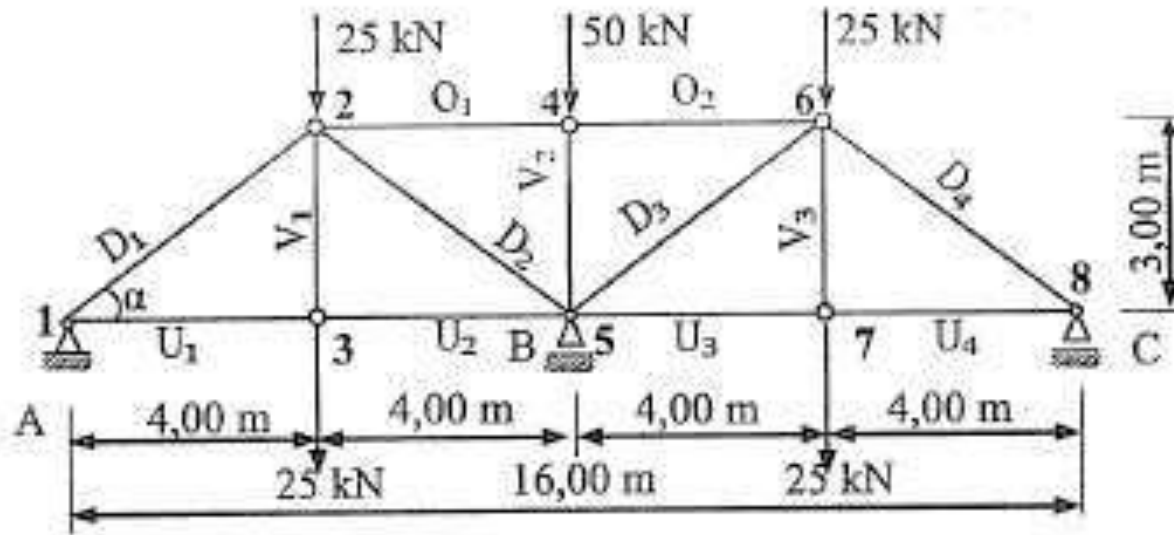
$$N_{nw} = X_{1w} N_{n1} + X_{2w} N_{n2} + \dots + X_{jw} N_{nj} + \dots + X_{kw} N_{nk} \quad (2.3.64)$$

biçiminde bulunur. Yukarıda anlatılan işlemler Çizelge 2.3.5'de görüldüğü gibi daha kolay bir şekilde hesaplanabilir.



2. Hiperstatik Sistemler

Örnek 2.3.8



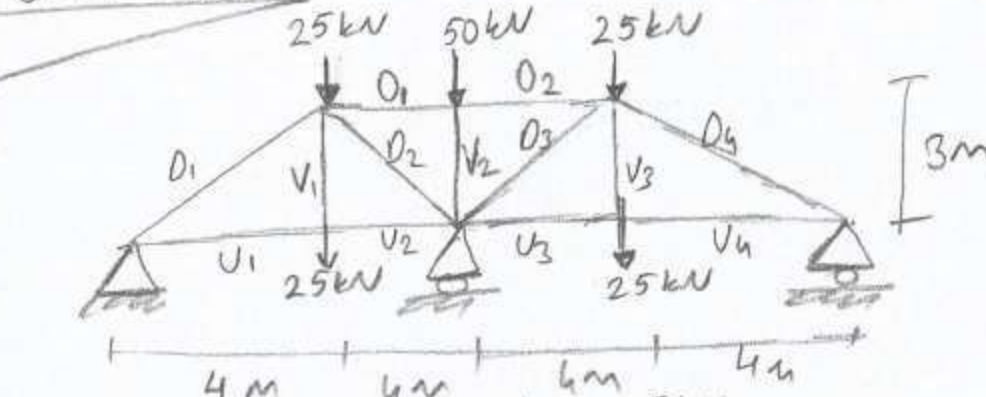
Şekil 2.3. 22a gerçek sistem

Şekil 2.3.22a'da boyutları ve yükleme durumu verilen kafes sistemde çubuk kuvvetlerini hesaplayınız. Üst başlık çubuklarının alanı 10 cm^2 , diğer çubukların alanı 12 cm^2 ve elastisite modülü $E=2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ 'dir.

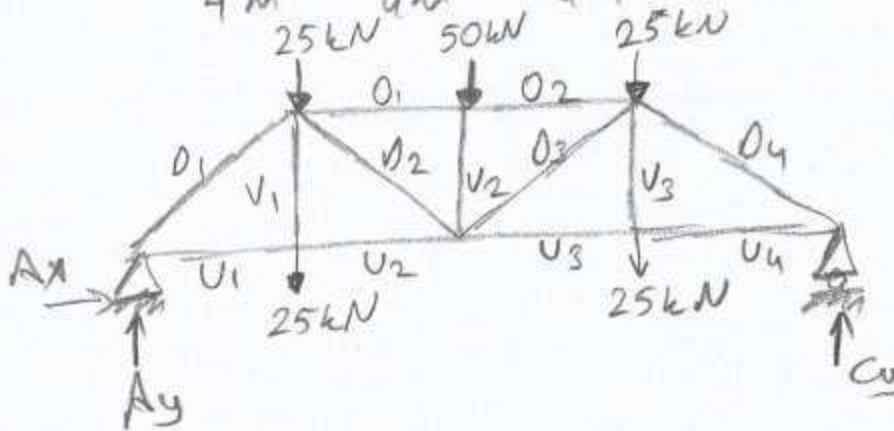
2. Hiperstatik Sistemler

(22)

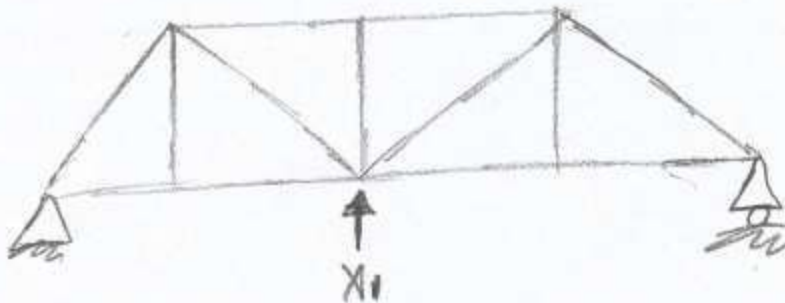
ÖRNEK 2.3.8



Gerçek sistem



Sıfır yüklenerek



İstatistik ESO sistem
ve Hiperstatik birliğe

2. Hiperstatik Sistemler

Sıfır Yüklenesinde Mesnet Tepkileri ve Gubuk Tep.

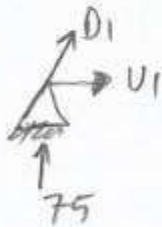
$$C_y \times 16 = 50 \times 4 + 50 \times 8 + 50 \times 12$$

$$C_y = 75 \text{ kN} \uparrow$$

$$A_x = 0$$

$$A_y = 75 \text{ kN} \uparrow$$

1 Döğümü



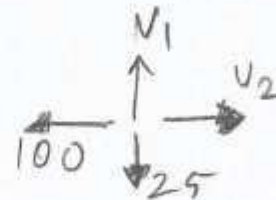
$$D_1 \cdot \frac{3}{5} = -75$$

$$D_1 = -125$$

$$-125 \times \frac{4}{5} + U_1 = 0$$

$$U_1 = 100$$

3 Döğümü



$$V_1 = 25$$

$$U_2 = 100$$

2. Hiperstatik Sistemler

2 Döğüm



$$O_1 + 41,667 \times \frac{4}{5} = -125 \times \frac{4}{5}$$

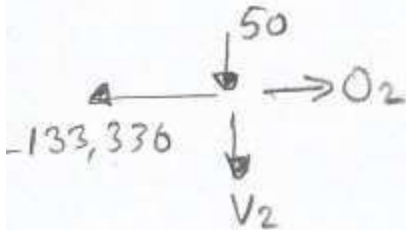
(23)

$$O_1 = -133,333$$

$$O_2 \cdot \frac{3}{5} + 50 = 125 \cdot \frac{3}{5}$$

$$O_2 = 41,667$$

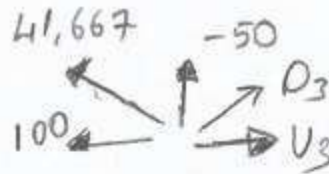
4 Döğüm



$$O_2 = -133,333$$

$$V_2 = -50$$

5 Döğüm



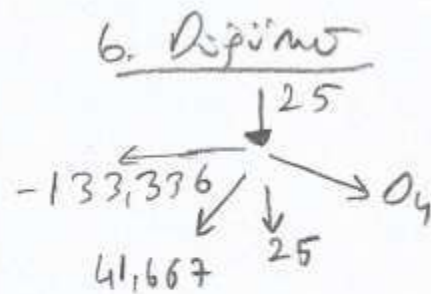
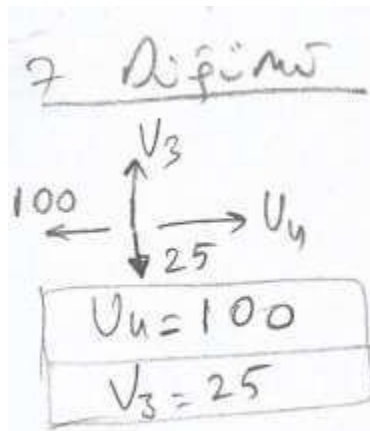
$$O_3 \times \frac{3}{5} + 41,667 \times \frac{3}{5} + (-50) = 0$$

$$O_3 = 41,667$$

$$41,667 \times \frac{4}{5} + V_3 = \frac{41,667 \times 4}{5} + 100$$

$$V_3 = 100$$

2. Hiperstatik Sistemler



$$D_4 \times \frac{4}{5} = -133,336 + 41,667 \times \frac{4}{5}$$

$$D_4 = -125$$



2. Hiperstatik Sistemler

Birim Yüklemede Mesnet Tep. ve a.b. kuvvetleri

(24)

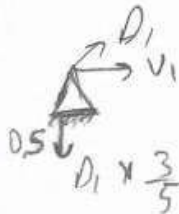
$$C_y \times 16 + 1 \times 8 = 0$$

$$C_y = 0,5 \text{ kN} \downarrow$$

$$A_x = 0$$

$$A_y = 0,5 \text{ kN} \uparrow$$

① Düğüme



$$0,833 \times \frac{4}{5} + V_1 = 0$$

$$V_1 = -0,667$$

$$D_1 = 0,833$$

3 Düğüme

$$V_1 = 0$$

$$V_1 = V_2 = -0,667$$

2 Düğüme



$$D_2 \times \frac{3}{5} + 0,833 \times \frac{3}{5} = 0$$

$$D_2 = -0,833$$

$$0,1 + \left(-0,833 \times \frac{4}{5} \right) \neq 0,833 \times \frac{4}{5}$$

4 Düğüme

$$D_1 = 1,333$$

2. Hiperstatik Sistemler

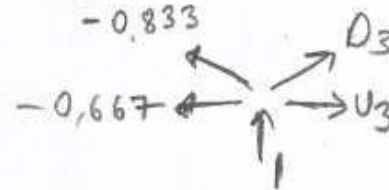
4 Düzüm

$$O_2 = O_1 = 1,333$$

$$V_2 = 0$$

$$O_1 = 1,333$$

5 Düzüm



$$-0,833 \times \frac{3}{5} + D_3 \times \frac{3}{5} = 0$$

$$D_3 = -0,833$$

$$U_3 = -0,667$$

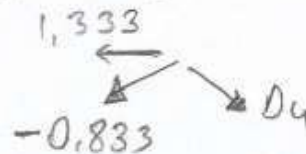
7 Düzüm



$$V_3 = 0$$

$$U_4 = -0,667$$

6 Düzüm



$$D_4 \times \frac{4}{5} = 1,333 - 0,833 \times \frac{4}{5}$$

$$D_4 = 0,833$$

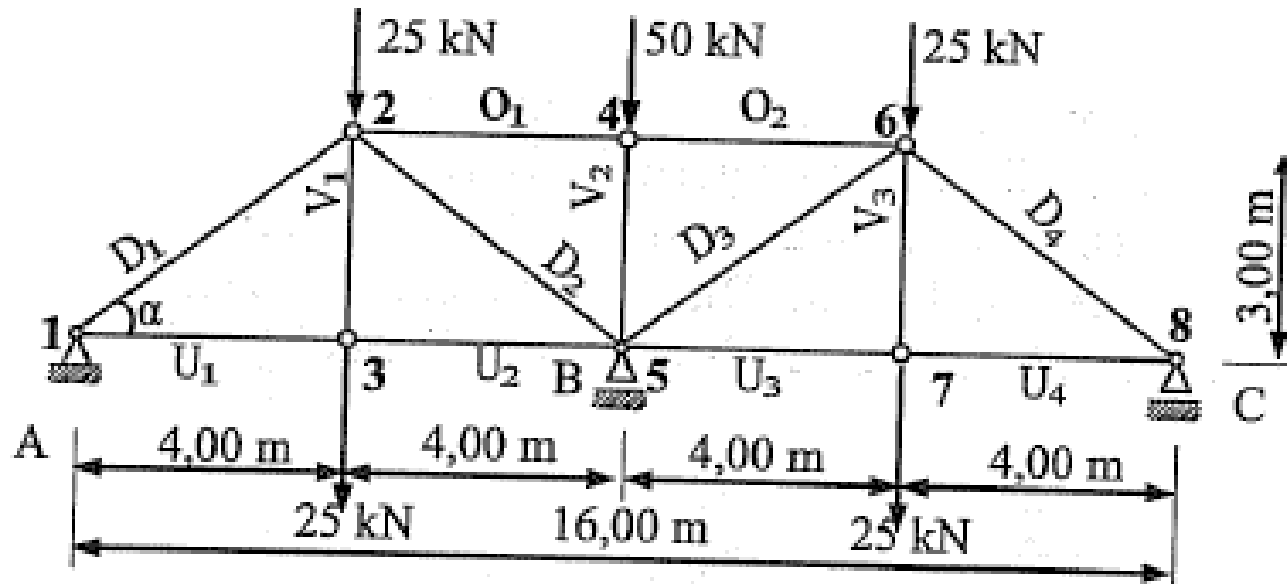
(25)

2. Hiperstatik Sistemler

k	L (m)	A (m ²)	N_{n0} (kN)	N_{n1} (kN)	$E \cdot \delta_{10}$	$E \cdot \delta_{11}$	N_{n1} (kN)
1	4	0,001	-133,333	1,333	-710931,56	7107,556	12,444
2	4	0,001	-133,333	1,333	-710931,56	7107,556	12,444
1	4	0,0012	100	-0,667	-222333,33	1482,963	27,057
2	4	0,0012	100	-0,667	-222333,33	1482,963	27,057
3	4	0,0012	100	-0,667	-222333,33	1482,963	27,057
4	4	0,0012	100	-0,667	-222333,33	1482,963	27,057
1	5	0,0012	-125	0,833	-433854,17	2891,204	-33,90
2	5	0,0012	41,667	-0,833	-144619,21	2891,204	-49,43
3	5	0,0012	41,667	-0,833	-144619,21	2891,204	-49,43
4	5	0,0012	-125	0,833	-433854,17	2891,204	-33,90
1	3	0,0012	25	0	0	0	25
2	3	0,0012	-50	0	0	0	-50
3	3	0,0012	25	0	0	0	25
$\Sigma = -3468143,2$					$\Sigma = 31711,78$		

$$\chi_1 = - \frac{E \delta_{10}}{E \delta_{11}} = - \frac{-3468143,2}{31711,78} = 109,36$$

Örnek 2.3 .23



Şekil 2.3.93a gerçek sistem

Şekil 2.3.93a'da boyutları ve yükleme durumu verilen kafes kirişte 3 düğüm noktasındaki düşey yer değiştirmeyi hesaplayınız. Üst başlık çubuklarının alanı 10 cm^2 , diğer çubukların alanı 12 cm^2 ve elastisite modülü $E=2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ dir.