



İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yapı Statikliği II Dersi

Doç.Dr. Müslüm Murat MARAŞ

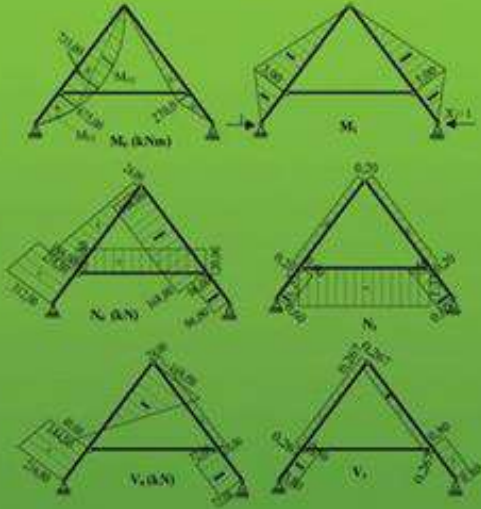
Malatya - 2026

Kaynaklar

BİRSEN YAYINEVİ

YAPI STATİĞİ II

YAPI SİSTEMLERİNDE YER DEĞİŞTİRMELERİN
VE
HİPERSTATİK SİSTEMLERİN
HESAP YÖNTEMLERİ



Prof. İbrahim EKİZ

GÜNCELLETİLMİŞ
3.
BASKI

YAPI STATİĞİ II

Yapı Sistemlerinde Yer
Değıştirmelerin Ve Hiperstatik
Sistemlerin Hesap Yöntemleri

Prof. Dr. İbrahim EKİZ

2. Hiperstatik Sistemler

2.4 AÇI YÖNTEMİ

2.4.1 Tanım

Açı yöntemi 1915'de Prof. G.A. Maney tarafından rijit düğüm noktalı sistemlerin hesabında kullanılan genel bir yöntem olarak ortaya konulmuştur. Yöntem daha sonra Mohr ve Manderla tarafından genel amaçla kullanılan eşitlikleri kafes sistemlerdeki ikinci derece gerilmeleri bulmak için geliştirilmiştir. 1932 yılında Hardy Cross bu yöntemi daha genel olarak kendi adı ile anılan moment dağıtım yöntemine uyarlamıştır. Yöntem bu amaç için oldukça kullanışlıdır. Ayrıca moment dağıtım yöntemi oldukça kolaylık sağlar. Esas eşitlikler moment alanı ve virtüel iş teoremi düşüncesinden çıkarılmıştır. Bu eşitliklerde eğilme momentinden meydana gelen şekil değiştirmeler göz önüne alınmış, kesme kuvveti ve normal kuvvetten meydana gelen şekil değiştirmeler ise göz ardı edilmiştir. Birçok hiperstatik kirişin ve çerçevenin hesabında normal kuvvet ve kesme kuvvetinin etkisi çok küçük olduğundan sadece eğilme momenti etkisi göz önüne alınarak yazılan açı eşitlikleri ile yapılan hesaplar sonucunda ortaya çıkacak hatalar da oldukça küçük olacaktır.

2. Hiperstatik Sistemler

Bir çubuktaki esas açı-yer değiştirme eşitlikleri, aşağıda belirtilen 3 genel değişken grubu ile ifade edilir.

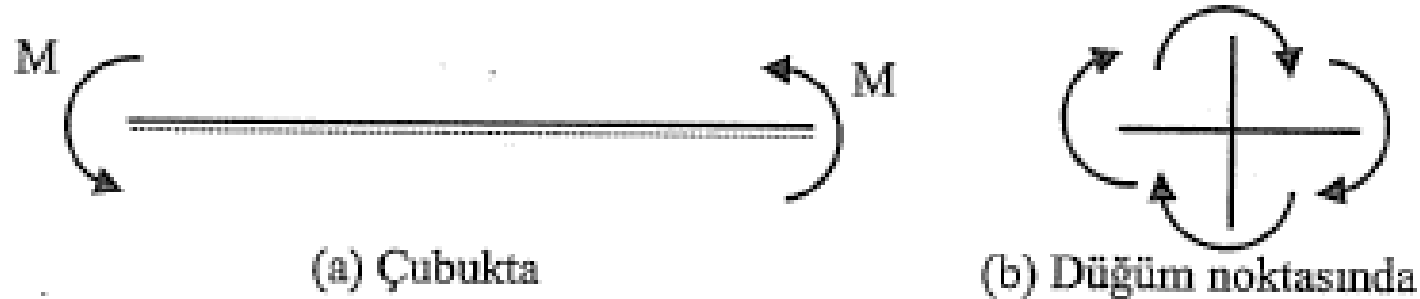
1. Çubuk uçlarına uygulanan uç kuvvetler (Uç momentler, çubuk eksenine dik uç kuvvet ve çubuk eksenine paralel uç kuvvet).
2. Çubuk uçlarında meydana gelen uç yer değiştirmeler (çubuğun elastik eğrisinin her bir ucundaki teğetinin eğimi, elastik eğri kirişinin uç noktalarının dönme açısı veya çubuğun iki ucunun bir birine göre rölatif yer değiştirmesi).
3. Çubuğa uygulanan dış kuvvetler.



2. Hiperstatik Sistemler

Açı yönteminin uygulamasında aşağıda belirtilen işaret kabulleri uygulanır.

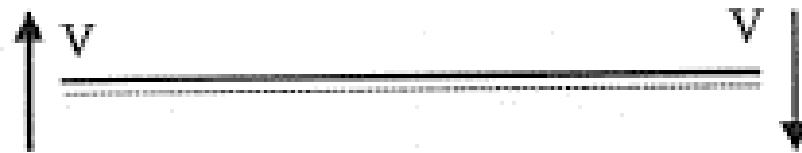
1. Uç Momentler: M , çubuk uçlarına etkiyen momentlerdir. Çubuğu saat akrebi tersi yönünde ve düğüm noktasını saat akrebi yönünde döndüren uç momentleri pozitif kabul edilir (Şekil 2.4.1a ve b).



Şekil 2.4.1 Uç momentleri ve pozitif yönleri

2. Hiperstatik Sistemler

2. Çubuk eksenine dik uç kuvvet: V , çubuk uçlarında etkiyen çubuğu saat akrebi yönünde döndüren çubuk eksenine dik uç kuvvetleri pozitif kabul edilir (Şekil 2.4.1c).



Şekil 2.4.1c Çubuk eksenine dik uç kuvvetler ve pozitif yönleri

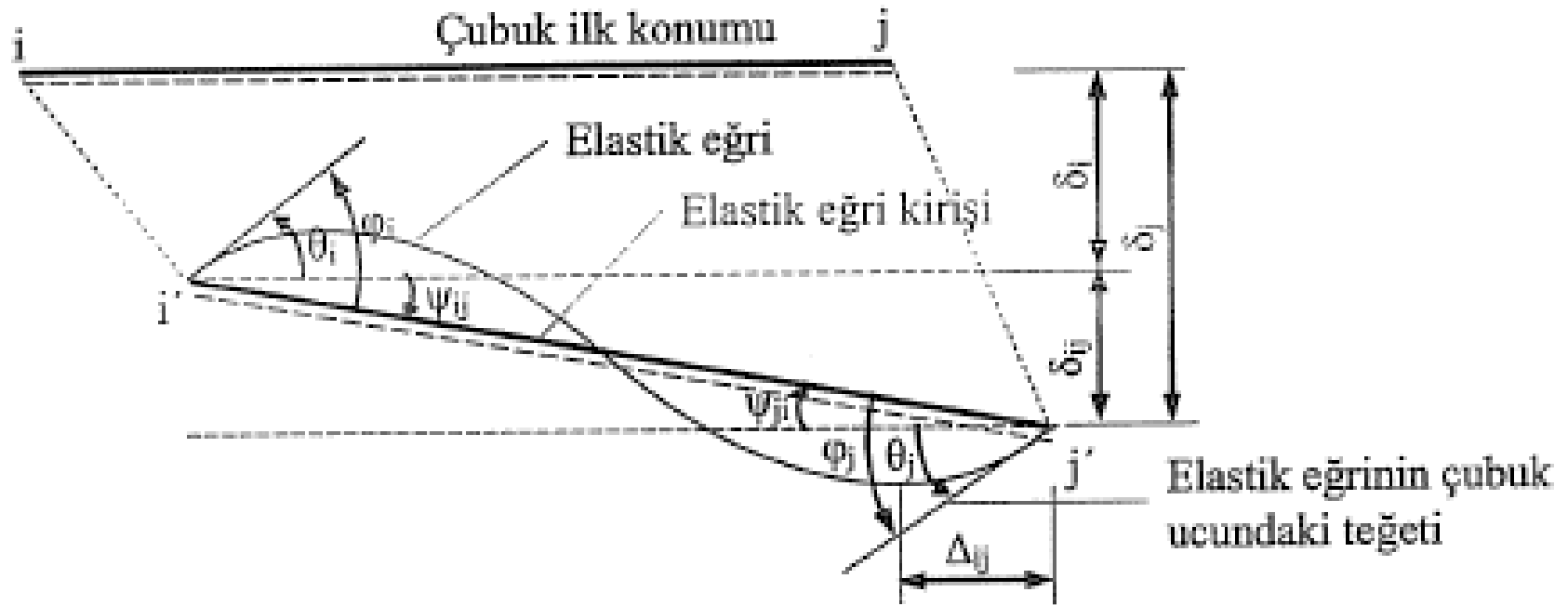
3. Çubuk eksenine paralel uç kuvvetler: N , çubuğu çekmeye çalıştıran çubuk eksenine paralel uç kuvvetler pozitif kabul edilir (Şekil 2.4.1d).



Şekil 2.4.1d Çubuk eksenine paralel uç kuvvetler ve pozitif yönleri

2. Hiperstatik Sistemler

4. θ elastik eğrinin çubuk ucundaki teğetinin çubuğun ilk konuma göre dönme açısı saat akrebi tersi yönünde pozitif kabul edilir (Şekil 2.4.1e).

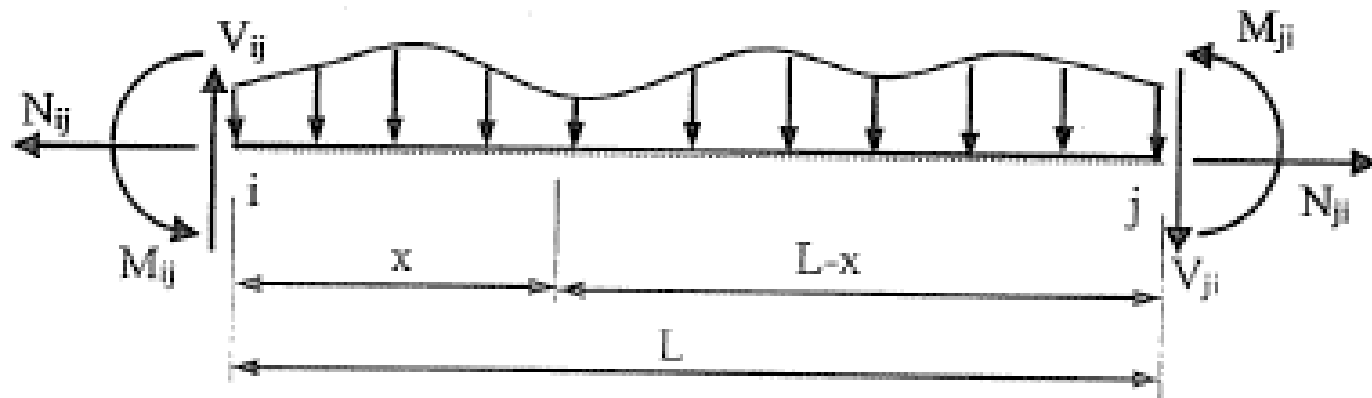


Şekil 2.4.1e Uç yer değiştirmeler ve pozitif yönleri

5. ψ elastik eğri kirişinin çubuğun başlangıç konumuna göre dönme açısı, saat akrebi yönünde pozitif kabul edilir. Bu aynı zamanda çubuğun iki ucu arasındaki çubuk eksenine dik rölatif yer değiştirme nedeni ile çubuk ilk konumu ve elastik eğri kirişi arasındaki dönme açısıdır (Şekil 2.4.1e).

2. Hiperstatik Sistemler

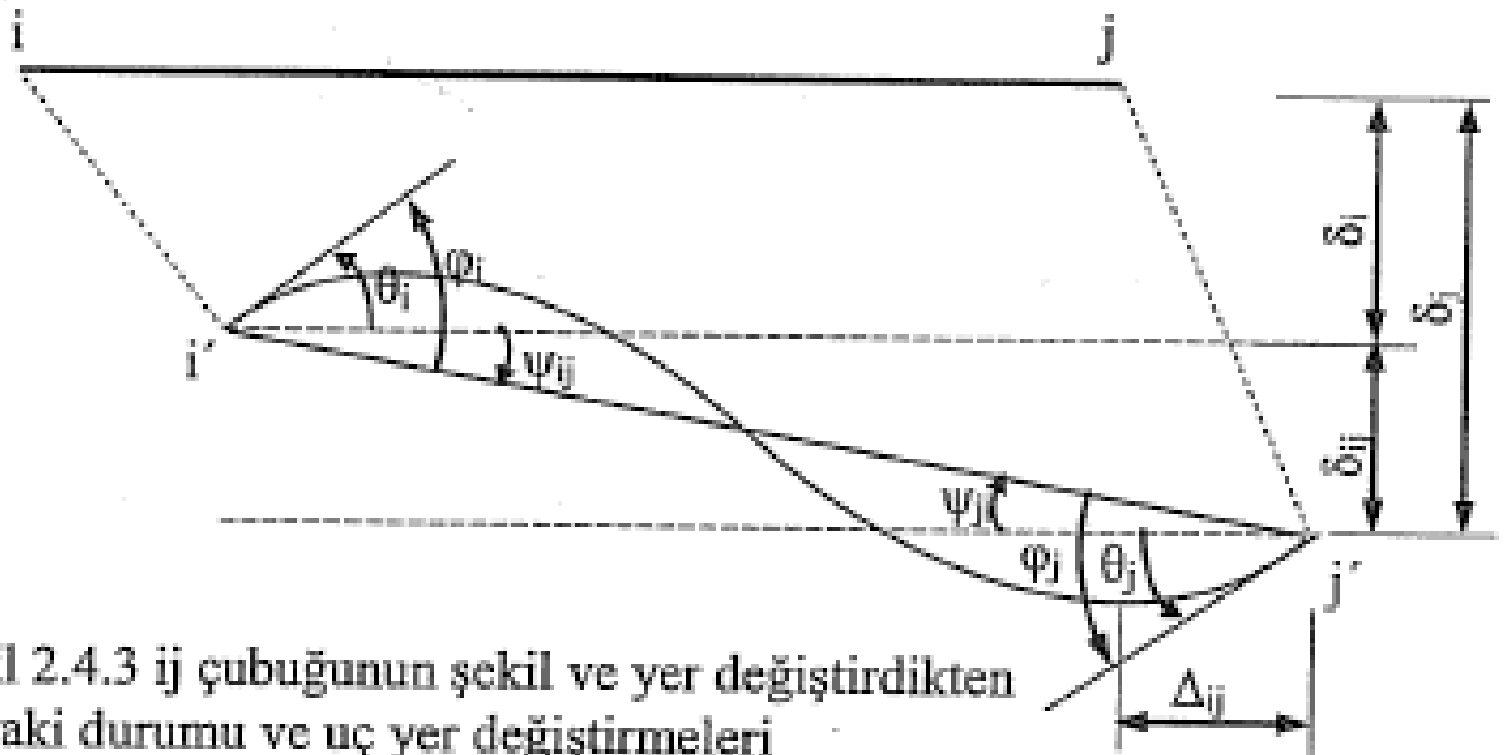
Uç kuvvetleri iki alt indis ile tanımlanır. Bu alt indisler çubuğun iki ucunun adıdır. Birinci alt indis çubuk uç kuvvetinin uygulandığı ucu gösterir. Örneğin ij çubuğunda M_{ij} , V_{ij} , N_{ij} , i ucunda, M_{ji} , V_{ji} , N_{ji} j ucunda uygulanan uç kuvvetleri gösterir (Şekil 2.4.2a).



Şekil 2.4. 2 (a) ij çubuğu uç kuvvetleri

2. Hiperstatik Sistemler

θ ve φ uç dönme açıları bulunduğu ucun alt indisi ile gösterilir. Örneğin ij çubuğunda θ_i ve φ_i i ucundaki açıyı ve θ_j ve φ_j j ucundaki açıyı gösterir (Şekil 2.4.3). δ ve Δ uç yer değiştirmeleri ve ψ elastik eğri kirişinin çubuğun ilk konumuna göre dönme açısı iki alt indisle gösterilir. Bunlar çubuğun iki ucunun adıdır. Örneğin ij çubuğunda ψ_{ij} , δ_{ij} ve Δ_{ij} sırayla i ucunun j ucuna göre dönme açısı, çubuk eksenine dik ve çubuk eksenini doğrultusundaki rölatif yer değiştirmeyi gösterir (Şekil 2.4.3).

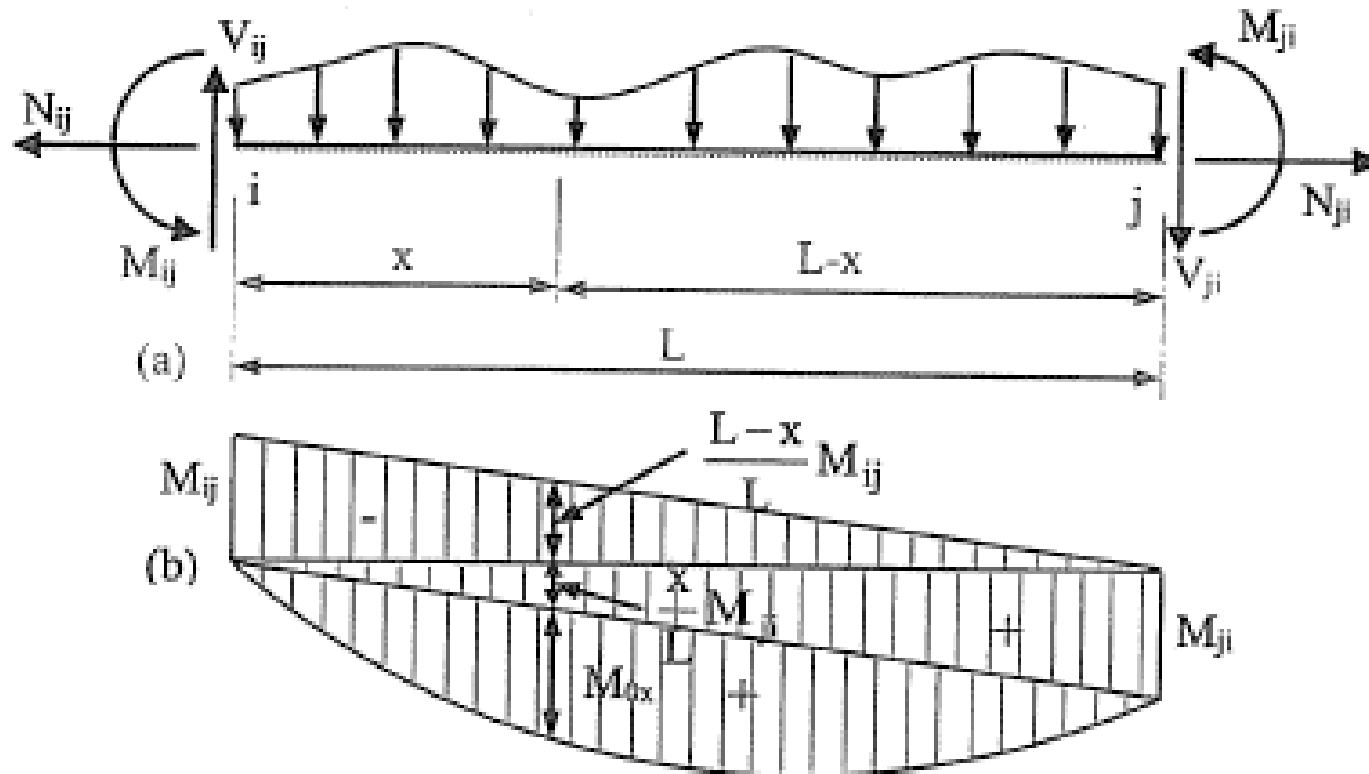


Şekil 2.4.3 ij çubuğunun şekil ve yer değiştirdikten sonraki durumu ve uç yer değiştirmeleri

2. Hiperstatik Sistemler

2.4.2 Dönme Açıları ve Uç Momentlerinin Hesabı

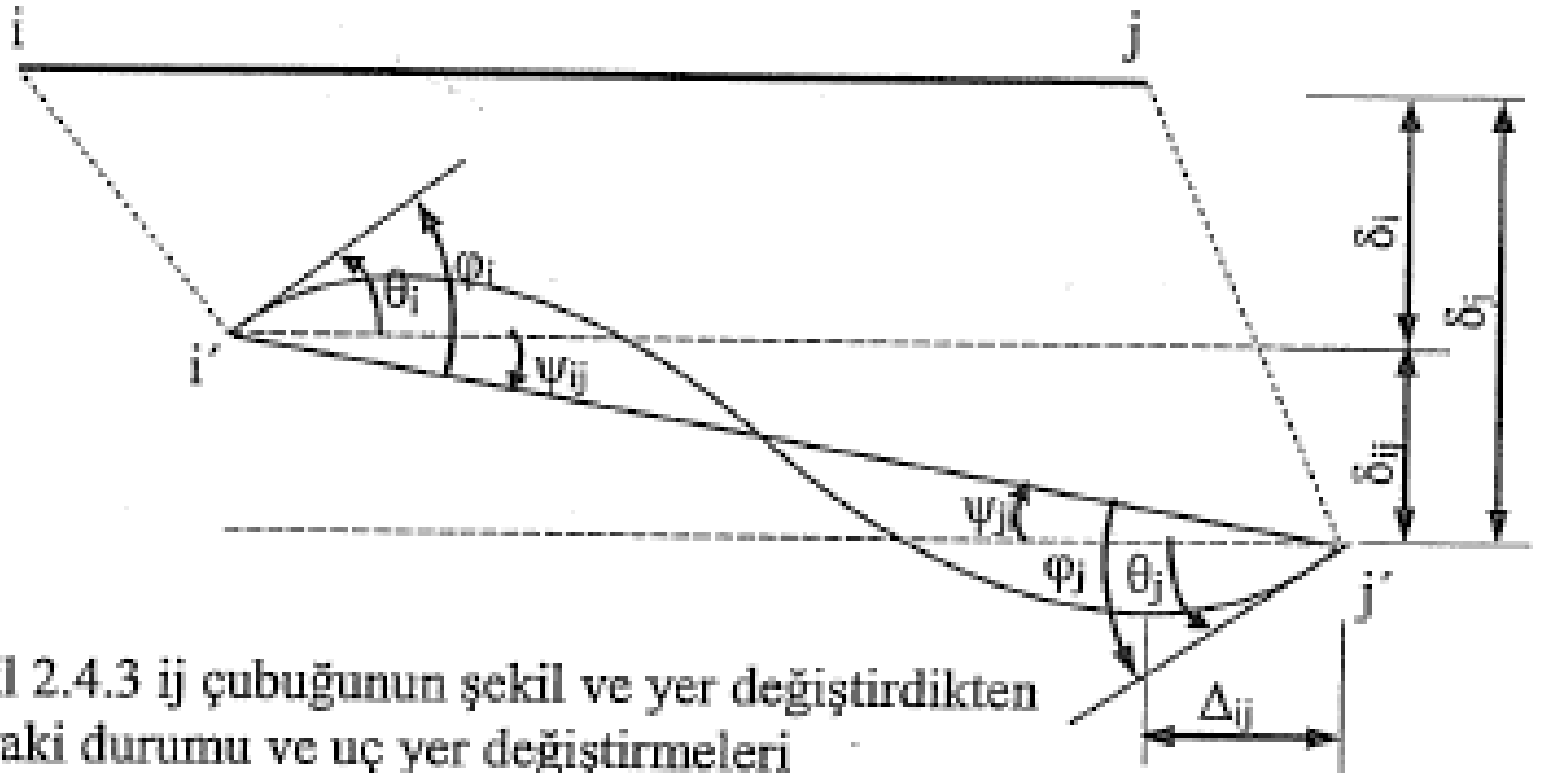
2.4.2.1 Dönme Açıları



Şekil 2.4. 2 ij çubuğu uç kuvvetleri ve eğilme momenti diyagramı

Şimdi Şekil 2.4.2’de görülen, uçlarında M_{ij} ve M_{ji} uç momentleri, V_{ij} ve V_{ji} , N_{ij} , N_{ji} uç kuvvetleri etkiyen ve üzeri herhangi bir durumdaki dış yükle yüklü bulunan ij çubuğunu ele alalım.

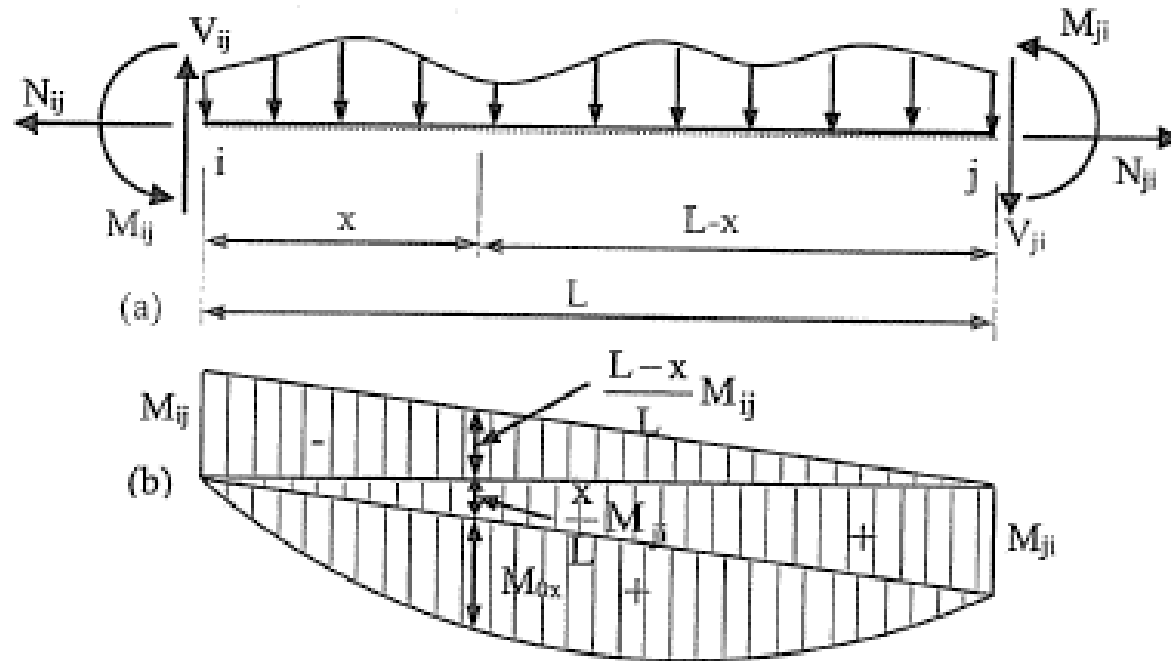
2. Hiperstatik Sistemler



Şekil 2.4.3 ij çubuğunun şekil ve yer değiştirdikten sonraki durumu ve uç yer değiştirmeleri

Bu çubuk yüklenmeden önce ij konumunda iken yüklenip şekil değiştirdikten sonra $i'j'$ konumuna gelecek ve elastik eğrisi de Şekil 2.4.3'de görüldüğü gibi olacaktır. Uç kuvvetlerinin pozitif yönleri Şekil 2.4.2a'da ve uç deplasmanlarının pozitif yönleri Şekil 2.4.3'de gösterildiği gibidir.

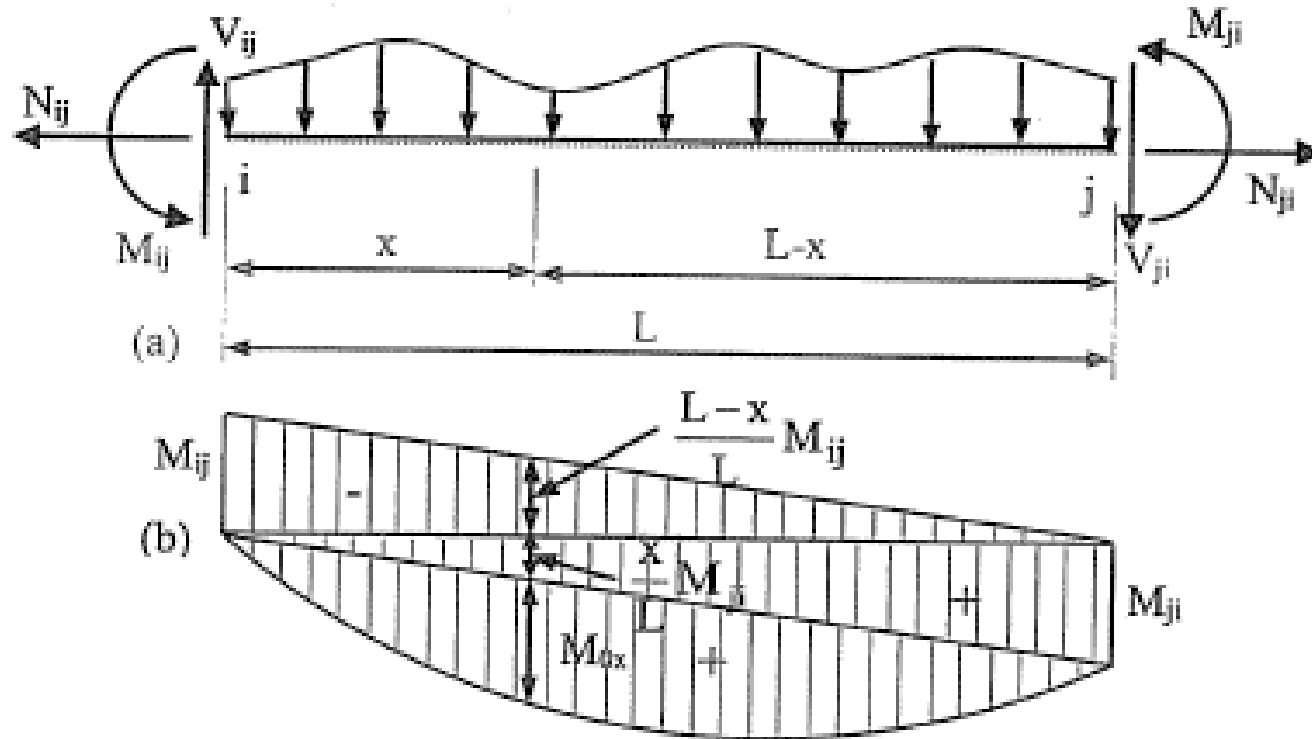
2. Hiperstatik Sistemler



Şekil 2.4. 2 ij çubuğu uç kuvvetleri ve eğilme momenti diyagramı

Çubuktaki eğilme momenti değerleri, çubuğa etkiyen uç momentleri ve dış yüklerden meydana gelen eğilme momentlerinin süperpozisyonundan bulunur. Örneğin i 'den x uzaklığındaki bir kesitte M_{ij} den meydana gelen eğilme momenti $M' = \frac{L-x}{L} M_{ij}$, M_{ji} den meydana gelen $M'' = \frac{x}{L} M_{ji}$ ve dış yüklerden meydana gelen M_{0x} eğilme momentlerinin cebirsel toplamıdır.

2. Hiperstatik Sistemler



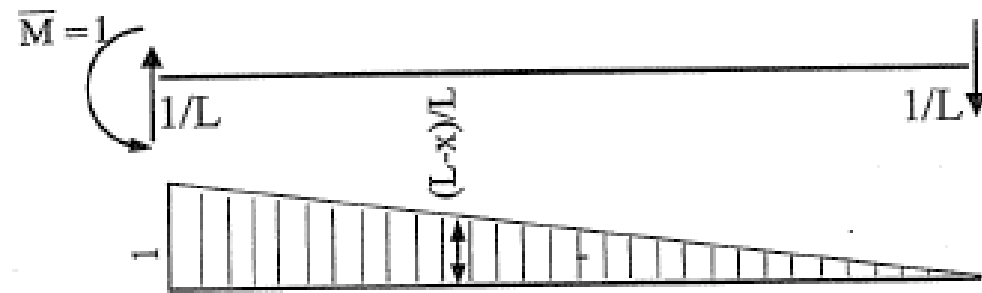
Şekil 2.4. 2 ij çubuğu uç kuvvetleri ve eğilme momenti diyagramı

Diğer yandan Şekil 2.4.2'den de görüldüğü gibi M_{ij} , M_{ji} ve M_0 eğilme momenti diyagramları basit kiriş eğilme momenti diyagramları ile aynıdır. Bu durumda gerek uç kuvvetleri ve gerekse dış yükleri basit kirişe etkiyormuş gibi düşünebiliriz. Herhangi bir kesitteki eğilme momenti M_0 , M' ve M'' değerlerinin cebirsel toplamıdır.

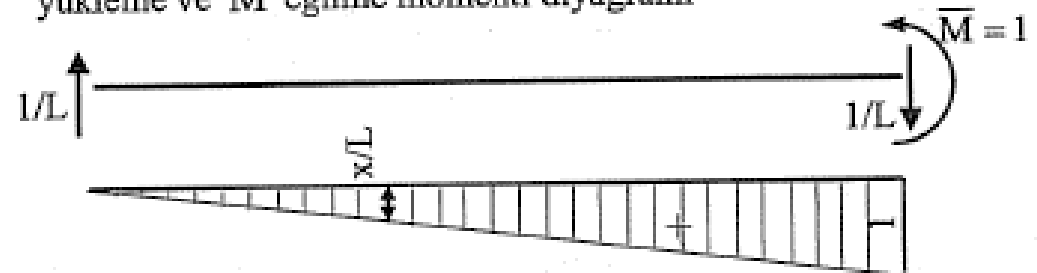
2. Hiperstatik Sistemler

Fakat hesaplarda kolaylık

bakımından bu üç moment ayrı ayrı göz önüne alınacaktır. Keza virtüel yüklemelerde basit kirişe etki ediyormuş gibi düşünülebilir. Bu durumda virtüel iş prensibi uygulanarak ϕ_i elastik eğri teğeti ile elastik eğri kirişi arasındaki dönme açısını bulmak için bunun (ϕ_i 'nin) tatbik noktası olan i'ye bu açı doğrultusunda 1 birimlik moment uygulanır (Şekil 2.4.4a) ve ϕ_j dönme açısını bulmak için j noktasına ve bu açının doğrultusunda ve bulunduğu noktada bir birimlik moment uygulanır (Şekil 2.4.4b)



Şekil 2.4.4 a ϕ_i açısını hesaplamak için yapılan birim virtüel yükleme ve $\bar{M}$ eğilme momenti diyagramı



Şekil 2.4.4 b ϕ_j açısını hesaplamak için yapılan birim virtüel yükleme ve $\bar{M}$ eğilme momenti diyagramı

2. Hiperstatik Sistemler

$$\varphi = \int M \bar{M} \frac{dx}{EI}$$

virtüel iş eşitliği yazılırsa

$$\varphi_i = \int_0^L \frac{(L-x)^2}{L^2} \frac{M_{ij}}{EI} dx - \int_0^L \frac{(L-x)x}{L^2} \frac{M_{ji}}{EI} dx - \int_0^L \frac{L-x}{L} \frac{M_{0x}}{EI} dx \quad (2.4.1.a)$$

$$\varphi_j = - \int_0^L \frac{(L-x)x}{L^2} \frac{M_{ij}}{EI} dx + \int_0^L \frac{x^2}{L^2} \frac{M_{ji}}{EI} dx + \int_0^L \frac{x}{L} \frac{M_{0x}}{EI} dx \quad (2.4.1.b)$$

elde edilir.



2. Hiperstatik Sistemler

2.4.2.2 Uç Momentleri

(2.4.1.a) ve (2.4.1.b) eşitliklerinde M_{ij} , M_{ji} , E ve L değerleri sabit olduğundan integralin dışına çıkarılır ve eşitlikler çözülürse

$$M_{ij} = EL^2 \frac{\varphi_i \int_0^L \frac{x^2}{I} dx + \varphi_j \int_0^L \frac{(L-x)x}{I} dx + \frac{1}{EL} \left[\int_0^L \frac{x^2}{I} dx \int_0^L \frac{(L-x)}{I} M_{0x} dx - \int_0^L \frac{(L-x)x}{I} dx \int_0^L \frac{x}{I} M_{0x} dx \right]}{\int_0^L \frac{x^2}{I} dx \int_0^L \frac{(L-x)^2}{I} dx - \left[\int_0^L \frac{(L-x)x}{I} dx \right]^2}$$

biçiminde veya paydaki terimi iki kısma ayırarak

$$M_{ij} = EL^2 \frac{\varphi_i \int_0^L \frac{x^2}{I} dx + \varphi_j \int_0^L \frac{(L-x)x}{I} dx}{\int_0^L \frac{x^2}{I} dx \int_0^L \frac{(L-x)^2}{I} dx - \left[\int_0^L \frac{(L-x)x}{I} dx \right]^2} + \frac{L \left[\int_0^L \frac{x^2}{I} dx \int_0^L \frac{(L-x)}{I} M_{0x} dx - \int_0^L \frac{(L-x)x}{I} dx \int_0^L \frac{x}{I} M_{0x} dx \right]}{\int_0^L \frac{x^2}{I} dx \int_0^L \frac{(L-x)^2}{I} dx - \left[\int_0^L \frac{(L-x)x}{I} dx \right]^2} \quad (2.4.2a)$$

2. Hiperstatik Sistemler

2.4.2.3 Elastisite Modülü ve Atalet Momentinin (EI'nin) Sabit Olması Durumunda Açılar ve Uç Momentleri

(2.4.1a) ve (2.4.1b) eşitliklerinde M_{ij} , M_{ji} , E , L ve I 'nın sabit olduğu göz önünde tutulur, integralin dışına çıkarılır ve integral işlemleri yapılırsa

$$\varphi_i = \frac{L}{3EI} M_{ij} - \frac{L}{6EI} M_{ji} - \frac{1}{EIL} \int_0^L M_{0x} (L - x) dx \quad (2.4.3a)$$

$$\varphi_j = -\frac{L}{6EI} M_{ij} + \frac{L}{3EI} M_{ji} + \frac{1}{EIL} \int_0^L M_{0x} x dx \quad (2.4.3.b)$$

elde edilir. Bu eşitliklerden M_{ij} ve M_{ji} değerleri çözülerek veya (2.4.2a) ve (2.4.2b) eşitliklerinde integraller alınarak

$$M_{ij} = 2E \frac{I}{L} (2\varphi_i + \varphi_j) + \frac{2}{L^2} \left[2 \int_0^L M_{0x} (L - x) dx - \int_0^L M_{0x} x dx \right] \quad (2.4.4a)$$

$$M_{ji} = 2E \frac{I}{L} (\varphi_i + 2\varphi_j) + \frac{2}{L^2} \left[\int_0^L M_{0x} (L - x) dx - 2 \int_0^L M_{0x} x dx \right] \quad (2.4.4b)$$

elde edilir.

2. Hiperstatik Sistemler

Şekil 2.4.3'den de görüldüğü gibi i ve j uçlarındaki toplam dönme açıları elastik eğri teğetinin eğimi ile çubuk eksenine dik yer değiştirmeden meydana gelen elastik eğri kirişi eğim açısının toplamıdır.

$$\varphi_i = \theta_i + \psi_{ij}, \quad \varphi_j = \theta_j + \psi_{ij} \quad (2.4.5a \text{ ve } b)$$

(2.4.4) eşitliklerinde φ yerine (2.4.5a) ve (2.4.5b) deki değerleri yerlerine konulursa

$$M_{ij} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_i + \theta_j + 3\psi_{ij}) + \frac{2}{L^2} \left[2 \int_0^L M_{0x} (L-x) dx - \int_0^L M_{0x} x dx \right] \quad (2.4.6a)$$

$$M_{ji} = 2E \frac{I}{L} (\theta_i + 2\theta_j + 3\psi_{ij}) + \frac{2}{L^2} \left[\int_0^L M_{0x} (L-x) dx - 2 \int_0^L M_{0x} x dx \right] \quad (2.4.6b)$$

elde edilir.

2. Hiperstatik Sistemler

Açılar çok küçük olduğundan açının tanjantı kendisine eşit alınabilir ve

$\text{tg} \psi_{ij} = \psi_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{L}$ yazılabilir. ψ 'lerin bu değerleri (2.4.6a ve b) eşitliklerinde yerine konulursa

$$M_{ij} = 2E \frac{I}{L} \left(2\theta_i + \theta_j + \frac{3\delta_{ij}}{L} \right) + \frac{2}{L^2} \left[2 \int_0^L M_{0x} (L-x) dx - \int_0^L M_{0x} x dx \right] \quad (2.4.7a)$$

$$M_{ji} = 2E \frac{I}{L} \left(\theta_i + 2\theta_j + \frac{3\delta_{ij}}{L} \right) + \frac{2}{L^2} \left[\int_0^L M_{0x} (L-x) dx - 2 \int_0^L M_{0x} x dx \right] \quad (2.4.7b)$$

uç momentleri elde edilir. Buraya kadar yükleme şartları göz önüne alınmamıştır ve (2.4.4), (2.4.6) ve (2.4.7) eşitlikleri herhangi bir çubuk üzerindeki çubuk eksenine dik dış yük ve moment etkisi durumu için geçerlidir. Bu eşitliklerin her birindeki son terim yük tipinin bir fonksiyonudur.

2. Hiperstatik Sistemler

$\theta_i, \theta_j, \psi_{ij}$ veya δ_{ij} değerlerinin hepsinin sıfır olması durumunda (2.4.4), (2.4.6) ve (2.4.7) eşitliklerinde son terimler sırayla i ve j uçlarındaki uç momentlere eşit olacaktır. Bilindiği gibi $\theta_i, \theta_j, \psi_{ij}$ veya δ_{ij} değerlerinin tümünün sıfıra eşit olmasının fiziksel anlamı çubuğun her iki ucunun da dönmeye ve yer değiştirmelere karşı tam olarak sabitleştirilmiş olduğudur. Diğer bir anlatımla bu çubuk iki ucu ankastre bir kiriştir. Bu nedenle (2.4.4), (2.4.6) ve (2.4.7) eşitliklerinin son terimleri iki ucu ankastre kirişin uç momentleridir. Bunlara **ankastrelik uç momentleri** denir. (2.4.7a) ve (2.4.7b) eşitliklerinde $\theta_i, \theta_j, \psi_{ij}$ veya δ_{ij} değerlerinin her biri yerine sıfır konularak bu ankastrelik uç momentleri

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{2}{L^2} \left[2 \int_0^L M_{0x} (L-x) dx - \int_0^L M_{0x} x dx \right] \quad (2.4.8a)$$

$$\mathcal{M}_{ji} = \frac{2}{L^2} \left[\int_0^L M_{0x} (L-x) dx - 2 \int_0^L M_{0x} x dx \right]$$

2. Hiperstatik Sistemler

veya bölüm 2.3.16 da anlatılan üç momentler eşitliğindeki (2.3.89) ve (2.3.90) eşitlikleri ile verildiği gibi

$$\mathcal{R} = \frac{6}{L^2} \int_0^L M_{0x} x \cdot dx \quad \text{ve} \quad \mathcal{L} = \frac{6}{L^2} \int_0^L M_{0x} (L - x) \cdot dx \quad (2.4.8c \text{ ve } d)$$

ile gösterilir, yerine konulur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa ankastrelik uç momentleri

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{2\mathcal{L} - \mathcal{R}}{3} \quad \text{ve} \quad \mathcal{M}_{ji} = \frac{\mathcal{L} - 2\mathcal{R}}{3} \quad (2.4.8e \text{ ve } f)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ basit kiriş yük terimleridir. Değişik yükleme durumları için Çizelge 2.3.9'dan alınabilir.



2. Hiperstatik Sistemler

(2.4.6) eşitliklerinde $\mathcal{M}_{ij}$ ve $\mathcal{M}_{ji}$ ankastrelik uç momentleri yerine konulursa

$$M_{ij} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_i + \theta_j + 3\psi_{ij}) + \mathcal{M}_{ij} \quad (2.4.9a)$$

$$M_{ji} = 2E \frac{I}{L} (\theta_i + 2\theta_j + 3\psi_{ij}) + \mathcal{M}_{ji} \quad (2.4.9b)$$

elde edilir. $I/L = k$ değerine **rijitlik faktörü** denir. I/L yerine bu değer konularak

$$M_{ij} = 2Ek_{ij}(2\theta_i + \theta_j + 3\psi_{ij}) + \mathcal{M}_{ij} \quad (2.4.10a)$$

$$M_{ji} = 2Ek_{ij}(\theta_i + 2\theta_j + 3\psi_{ij}) + \mathcal{M}_{ji} \quad (2.4.10b)$$

elde edilir.

2. Hiperstatik Sistemler

2.4.2.4 Ankastrelik Uç Momentleri

Yukarıda da belirtildiği gibi ankastre mesnedin bulunduğu uçta kiriş üzerindeki dış kuvvetlerden meydana gelen uç momentlere ankastrelik uç momentleri denir. İki ucu ankastre kirişler için (2.4.8a) ve (2.4.8b) eşitliklerinden hesaplanabilir. Burada yaygın kullanılan birkaç yük için ankastrelik uç momentlerinin hesabı gösterilmiştir. Diğer yüklemeler için benzer şekilde hesaplanabilir veya Çizelge 2.4.1'den alınır.

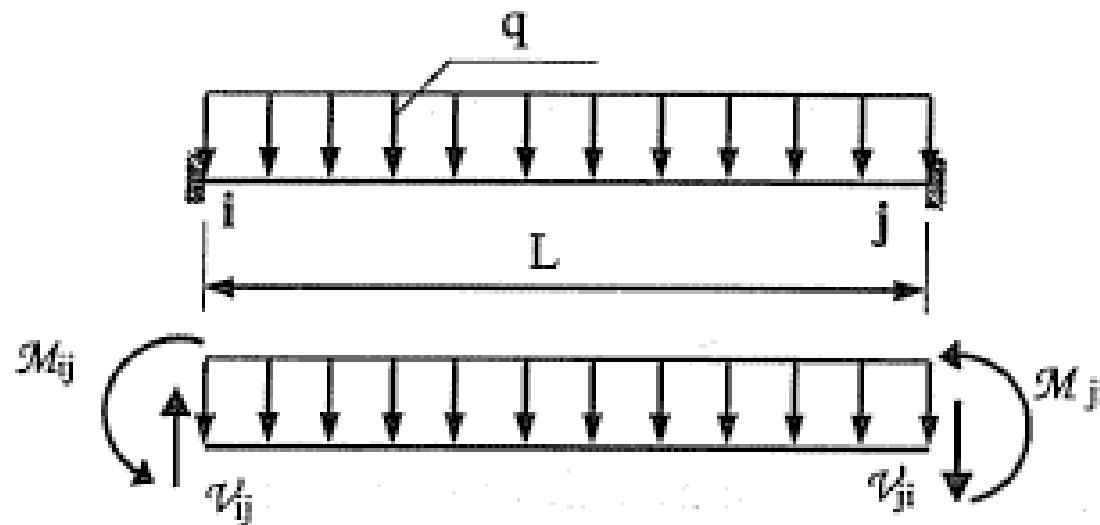
$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{2}{L^2} \left[2 \int_0^L M_{0x} (L-x) dx - \int_0^L M_{0x} x dx \right] \quad (2.4.8a)$$

$$\mathcal{M}_{ji} = \frac{2}{L^2} \left[\int_0^L M_{0x} (L-x) dx - 2 \int_0^L M_{0x} x dx \right] \quad (2.4.8b)$$

2. Hiperstatik Sistemler

2.4.2.4.1-Düzgün yayılı yükle yüklü iki ucu ankastre kiriş

Şekil 2.4.5 deki düzgün yayılı yüklü ankastre kirişteki ankastrelik uç momentini hesaplamak için önce basit kırışteki açıklık momenti $M_{0x} = q(Lx - x^2)/2$ hesaplanır ve (2.4.8) eşitliklerinde yerine konulursa sırayla i ve j uçlarındaki ankastrelik uç momentleri



Şekil 2.4.5 Düzgün yayılı yükle yüklü iki ucu ankastre kiriş

2. Hiperstatik Sistemler

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{2}{L^2} \left[2 \int_0^L \frac{q}{2} (Lx - x^2)(L - x) dx - \int_0^L \frac{q}{2} (Lx - x^2) x dx \right]$$

$$\mathcal{M}_{ij} = qL^2 / 12 \quad (2.4.11 \text{ a})$$

$$\mathcal{M}_{ji} = \frac{2}{L^2} \left[\int_0^L \frac{q}{2} (Lx - x^2)(L - x) dx - 2 \int_0^L \frac{q}{2} (Lx - x^2) x dx \right]$$

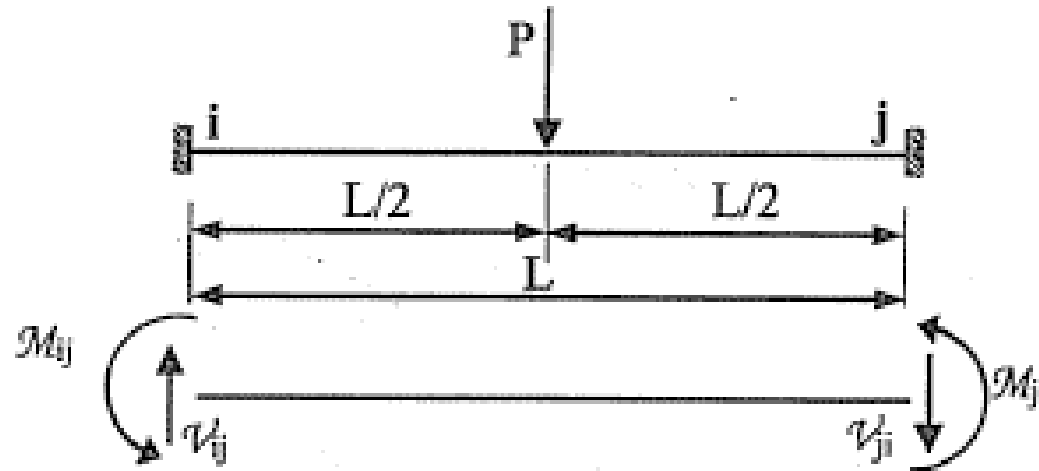
$$\mathcal{M}_{ji} = -qL^2 / 12 \quad (2.4.11b)$$

biçiminde formül olarak bulunur.



2. Hiperstatik Sistemler

2.4.2.4.2-Tam orta noktasında P tekil kuvveti ile yüklü iki ucu ankastre Kiriş



Şekil 2.4.6 Açıklık ortasında tekil kuvvetle yüklü iki ucu ankastre kiriş

Basit kirişte açıklığın ilk yarısında $M_{0x} = (P/2)x$ ve ikinci yarısında $M_{0x} = (P/2)(L - x)$ bulunur ve (2.4.8) eşitliklerinde yerine konularak

2. Hiperstatik Sistemler

$$M_{ij} = \frac{2}{L^2} \left[2 \int_0^{L/2} \frac{P}{2} x(L-x) dx - \int_0^{L/2} \frac{P}{2} x^2 dx + 2 \int_{L/2}^L \frac{P}{2} (L-x)^2 dx - \int_{L/2}^L \frac{P}{2} (L-x)x dx \right]$$

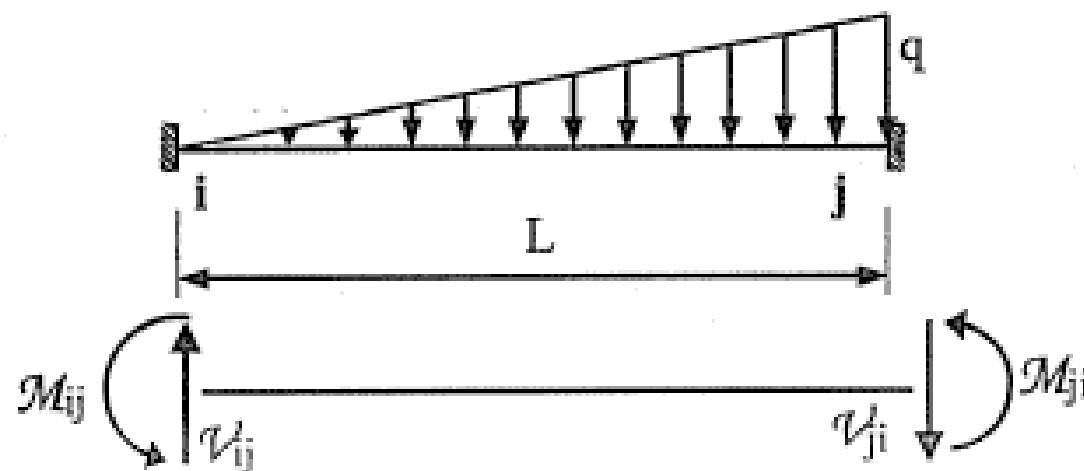
$$M_{ij} = PL/8 \quad (2.4.12a)$$

$$M_{ji} = \frac{2}{L^2} \left[\int_0^{L/2} \frac{P}{2} x(L-x) dx - 2 \int_0^{L/2} \frac{P}{2} x^2 dx + \int_{L/2}^L \frac{P}{2} (L-x)^2 dx - 2 \int_{L/2}^L \frac{P}{2} (L-x)x dx \right]$$

$$M_{ji} = -PL/8 \quad (2.4.12b)$$

biçiminde formül olarak bulunur.

2.4.2.4.3-Dik üçgen yayılı yükle yüklü iki ucu ankastre kiriş



Şekil 2.4.7 Üçgen yayılı yükle yüklü iki ucu ankastre kiriş

2. Hiperstatik Sistemler

Basit kiriş açıklık momenti $M_{0x} = \frac{qL}{6} \left(x - \frac{x^3}{L^2} \right)$ yazılır ve (2.4.8)

eşitliklerinde yerine konulursa

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{2}{L^2} \left[2 \int_0^L \frac{qL}{6} \left(x - \frac{x^3}{L^2} \right) (L - x) dx - \int_0^L \frac{qL}{6} \left(x - \frac{x^3}{L^2} \right) x dx \right]$$

$$\mathcal{M}_{ij} = qL^2 / 30 \quad (2.4.13a)$$

$$\mathcal{M}_{ji} = \frac{2}{L^2} \left[\int_0^L \frac{qL}{6} \left(x - \frac{x^3}{L^2} \right) (L - x) dx - 2 \int_0^L \frac{qL}{6} \left(x - \frac{x^3}{L^2} \right) x dx \right]$$

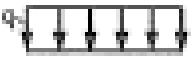
$$\mathcal{M}_{ji} = -qL^2 / 20 \quad (2.4.13b)$$

bulunur. Değişik yük tipleri için ankastrelik uç momentleri hesaplanarak çizelge olarak düzenlenebilir. Çizelge 2.4.1'de değişik yükler için ankastrelik uç momentleri verilmiştir.

2. Hiperstatik Sistemler

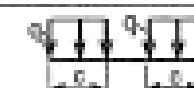
DÖNME AÇILARI VE UÇ MOMENTLERİ

ÇİZELGE 2.4.1 ANKASTRELİK UÇ MOMENTLERİ

							
	Yük Şekli	M_A	M_B	$\bar{M}_A$	$\bar{M}_B$	$\bar{M}_A$	$\bar{M}_B$
1		$-\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL^2}{8}$	$-\frac{qL^2}{8}$	$-\frac{qL^2}{8}$	$-\frac{qL^2}{8}$
2		$-\frac{qL^2}{12} [1 - \alpha^2 (2 - \alpha)]$	$-\frac{qL^2}{12} [1 - \alpha^2 (2 - \alpha)]$	$-\frac{qL^2}{8} [1 - \alpha^2 (2 - \alpha)]$	$-\frac{qL^2}{8} [1 - \alpha^2 (2 - \alpha)]$	$-\frac{qL^2}{8} [1 - \alpha^2 (2 - \alpha)]$	$-\frac{qL^2}{8} [1 - \alpha^2 (2 - \alpha)]$
3		$-\frac{5}{96} qL^2$	$-\frac{5}{96} qL^2$	$-\frac{5}{64} qL^2$	$-\frac{5}{64} qL^2$	$-\frac{5}{64} qL^2$	$-\frac{5}{64} qL^2$
4		$-\frac{1}{8} PL$	$-\frac{1}{8} PL$	$-\frac{3}{16} PL$	$-\frac{3}{16} PL$	$-\frac{3}{16} PL$	$-\frac{3}{16} PL$
5		$-\frac{L^2}{60} (3q_1 + 2q_2)$	$-\frac{L^2}{60} (2q_1 + 3q_2)$	$-\frac{L^2}{120} (8q_1 + 7q_2)$	$-\frac{L^2}{120} (7q_1 + 8q_2)$	$-\frac{L^2}{120} (8q_1 + 7q_2)$	$-\frac{L^2}{120} (7q_1 + 8q_2)$
6		$-\frac{1}{20} qL^2$	$-\frac{1}{30} qL^2$	$-\frac{1}{15} qL^2$	$-\frac{7}{120} qL^2$	$-\frac{1}{15} qL^2$	$-\frac{7}{120} qL^2$
7		$-\frac{1}{30} qL^2$	$-\frac{1}{20} qL^2$	$-\frac{7}{120} qL^2$	$-\frac{1}{15} qL^2$	$-\frac{7}{120} qL^2$	$-\frac{1}{15} qL^2$
8		$-\frac{1}{15} qL^2$	$-\frac{1}{15} qL^2$	$-\frac{1}{10} qL^2$	$-\frac{1}{10} qL^2$	$-\frac{1}{10} qL^2$	$-\frac{1}{10} qL^2$
$\alpha = a/L, \quad \beta = b/L,$ $\gamma = c/L$		Çizelgedeki pozitif yönler					
		Cross ve Açı yöntemi pozitif yönleri					

2. Hiperstatik Sistemler

ÇİZELGE 2.4.1 DEVAMI ANKASTRELİK UÇ MOMENTLERİ

					
	Yük Şekli	M_A	M_B	$\bar{M}_A$	$\bar{M}_B$
9		$-\frac{qc^2}{6}(3-2\gamma)$	$-\frac{qc^2}{6}(3-2\gamma)$	$-\frac{qc^2}{4}(3-2\gamma)$	$-\frac{qc^2}{4}(3-2\gamma)$
10		$-\frac{qc^2}{3}(1,5-2\gamma+0,75\gamma^2)$	$-\frac{qc^2}{3}\gamma(1-0,75\gamma)$	$-\frac{qc^2}{8}(2-\gamma)^2$	$-\frac{qc^2}{8}(2-\gamma^2)$
11		$-\frac{qc^2}{3}\gamma(1-0,75\gamma)$	$-\frac{qc^2}{3}(1,5-2\gamma+0,75\gamma^2)$	$-\frac{qc^2}{8}(2-\gamma^2)$	$-\frac{qc^2}{8}(2-\gamma)^2$
12		$-qc\left[a\beta^2+\frac{\gamma^2}{12}(L-3b)\right]$	$-qc\left[b\alpha^2+\frac{\gamma^2}{12}(L-3a)\right]$	$-\frac{qbc}{2}(1-\beta^2-0,25\gamma^2)$	$-\frac{qac}{2}(1-\alpha^2-0,25\gamma^2)$
13		$-qLc\left[\alpha(1-\alpha)-\frac{\gamma^2}{12}\right]$	$-qLc\left[\alpha(1-\alpha)-\frac{\gamma^2}{12}\right]$	$-\frac{qLc}{2}\left[3\alpha(1-\alpha)-\frac{\gamma^2}{4}\right]$	$-\frac{qLc}{2}\left[3\alpha(1-\alpha)-\frac{\gamma^2}{4}\right]$
14		$-\frac{qL^2}{30}\left[1+\beta+\beta^2-\frac{3\beta^3}{2}\right]$	$-\frac{qL^2}{30}\left[1+\alpha+\alpha^2-\frac{3\alpha^3}{2}\right]$	$-\frac{qL^2}{120}(1+\beta)(7-3\beta^2)$	$-\frac{qL^2}{120}(1+\alpha)(7-3\alpha^2)$
15		$-\frac{qc^2}{3}\left[1-1,5\gamma+0,60\gamma^2\right]$	$-\frac{qc^2}{4}\gamma(1-0,3\gamma)$	$-\frac{qc^2}{6}\left[2-2,25\gamma+0,60\gamma^2\right]$	$-\frac{qc^2}{6}(1-0,6\gamma^2)$
$\alpha = a/L, \quad \beta = b/L,$ $\gamma = c/L$		Çizelgedeki pozitif yönler Cross ve Açı yöntemi pozitif yönleri			

2. Hiperstatik Sistemler

DÖNME AÇILARI VE UÇ MOMENTLERİ

322

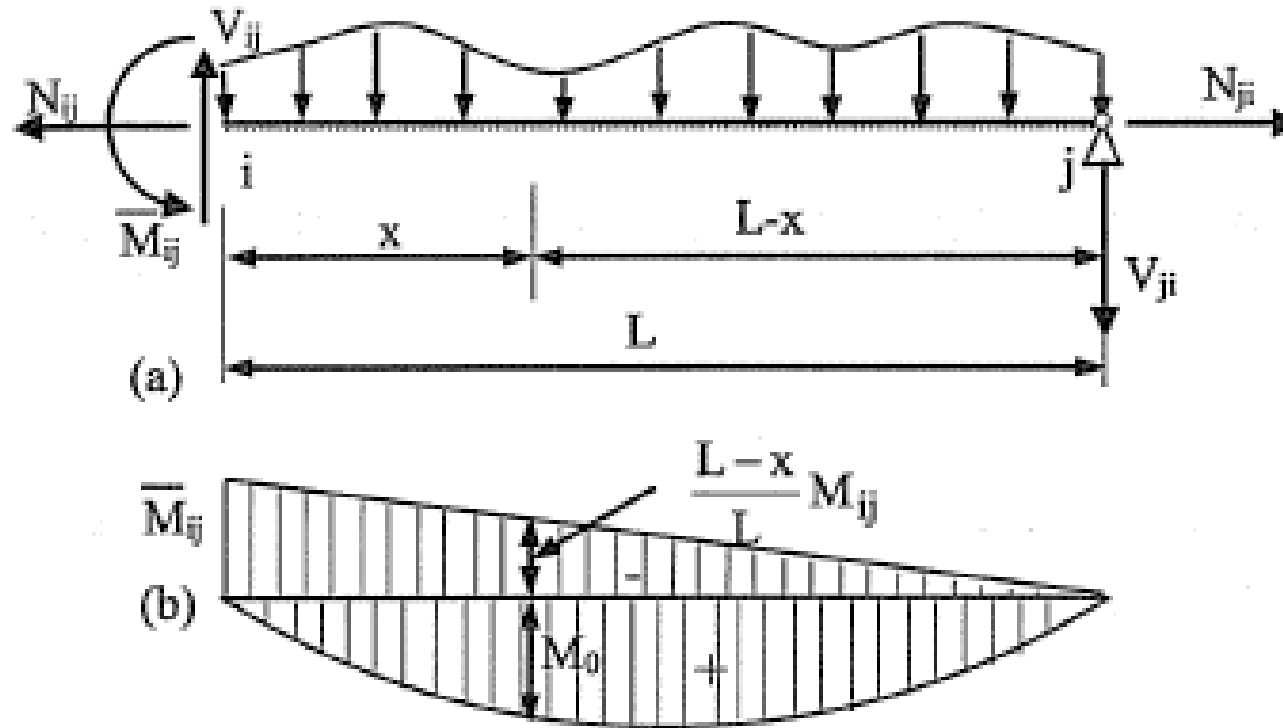
DÖNME AÇILARI VE UÇ MOMENTLERİ

ÇİZELGE 2.4.1 DEVAMI ANKASTRELİK UÇ MOMENTLERİ					
	Yük Şekli	M_A	M_B	$\bar{M}_A$	$\bar{M}_B$
16		$-\frac{qc^2}{6} [1 - \gamma + 0,3\gamma^2]$	$-\frac{qc^2}{12} \gamma(1 - 0,6\gamma)$	$-\frac{qc^2}{6} [1 - 0,75\gamma + 0,15\gamma^2]$	$-\frac{qc^2}{12} (1 - 0,3\gamma^2)$
17		$-\frac{qc^2}{12} (2 - \gamma)$	$-\frac{qc^2}{12} (2 - \gamma)$	$-\frac{qc^2}{8} (2 - \gamma)$	$-\frac{qc^2}{8} (2 - \gamma)$
18		$-Pa\beta^2$	$-Pb\alpha^2$	$-\frac{1}{2} Pa\beta(1 + \beta)$	$-\frac{1}{2} Pb\alpha(1 + \alpha)$
19		$-P(2a\beta^2 + \frac{ay^2}{2} - by^2)$	$-P(2b\alpha^2 + \frac{by^2}{2} - ay^2)$	$-Pb(1 - \beta^2 - 0,75\gamma^2)$	$-Pb(1 - \alpha^2 - 0,75\gamma^2)$
20		$-M\beta(3\alpha - 1)$	$-M\alpha(1 - 3\beta)$	$-\frac{M}{2} (1 - 3\beta^2)$	$-\frac{M}{2} (3\alpha^2 - 1)$
21		$-Pa(1 - \alpha)$	$-Pa(1 - \alpha)$	$-\frac{3}{2} Pa(1 - \alpha)$	$-\frac{3}{2} Pa(1 - \alpha)$
22		$-EI \frac{\alpha_1 \Delta t}{h}$	$-EI \frac{\alpha_1 \Delta t}{h}$	$-\frac{3}{2} EI \frac{\alpha_1 \Delta t}{h}$	$-\frac{3}{2} EI \frac{\alpha_1 \Delta t}{h}$
23		$-\frac{6EI}{L^2} (\Delta B - \Delta A)$	$\frac{6EI}{L^2} (\Delta B - \Delta A)$	$-\frac{3EI}{L^2} (\Delta B - \Delta A)$	$\frac{3EI}{L^2} (\Delta B - \Delta A)$
$\alpha = a/L, \beta = b/L,$ $\gamma = c/L$		Çizelgedeki pozitif yönler Cross ve Açılı yöntemi pozitif yönleri			

2. Hiperstatik Sistemler

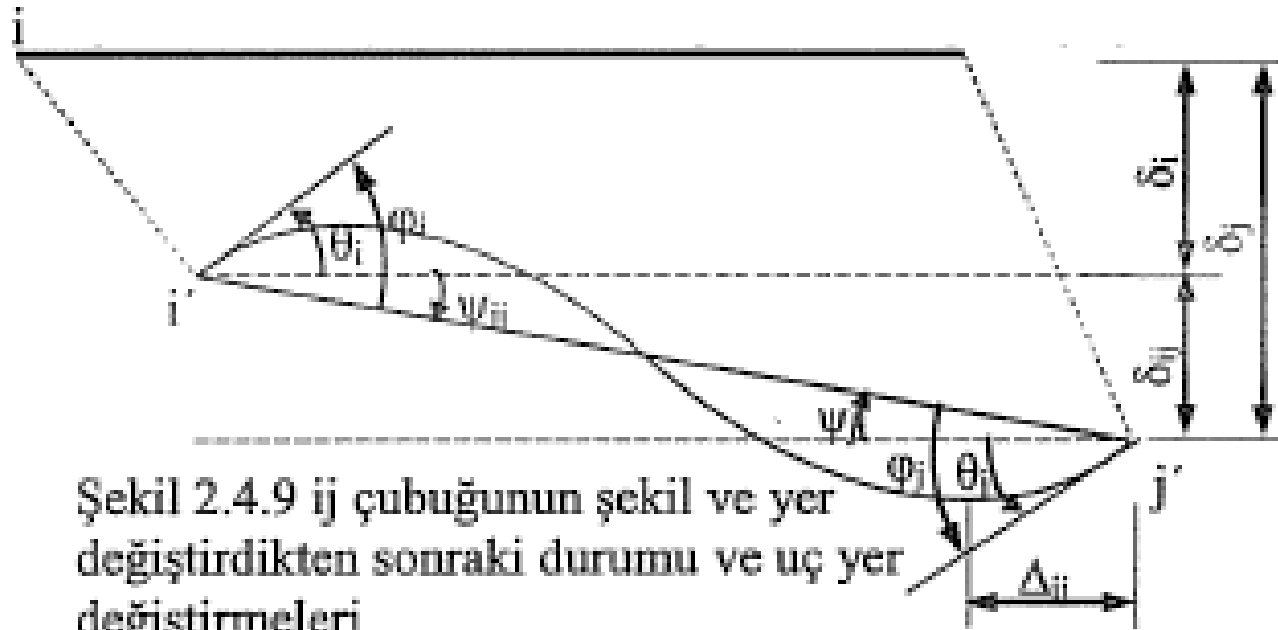
2.4.3 Özel Durumlarda Dönme Açıları ve Uç Momentleri

2.4.3.1 Çubuğun sağ ucunun mafsallı olması durumu



Şekil 2.4.8 Uç kuvvetler ve eğilme momenti diyagramı

2. Hiperstatik Sistemler



2. Hiperstatik Sistemler

Şekil.2.4.8'de görüldüğü gibi j mesnedi mafsallı (sabit veya çubuk eksenine paralel hareketli mesnet) olduğu zaman $M_{ji} = 0$ olur. Bu durumda virtüel iş prensibi uygulanarak φ_i elastik eğri teğeti ile elastik eğri kirişi arasındaki dönme açısını bulmak için bunun tatbik noktası olan i ye φ_i 'nin doğrultusunda 1 birimlik moment uygulanır (Şekil 2.4.10) ve Şekil 2.4.8b'deki eğilme momenti ile birlikte virtüel iş eşitliği yazılarak veya (2.4.1a) eşitliğinde $M_{ji} = 0$ konularak ve iki ucu ankastre kirişten farklı olduğunu göstermek için uç momenti $\bar{M}$ ile gösterilerek

$$\varphi_i = \int_0^L \frac{(L-x)^2}{L^2} \frac{\bar{M}_{ij}}{EI} dx - \int_0^L \frac{L-x}{L} \frac{M_{0x}}{EI} dx \quad (2.4.14a)$$

elde edilir. Burada $\bar{M}_{ij}$ sabit olduğundan integralin dışına alınır ve eşitliğin sol tarafına geçirilirse

$$\bar{M}_{ij} = \frac{EL^2 \varphi_i + L \int_0^L (L-x) M_{0x} \frac{dx}{L}}{\int_0^L (L-x)^2 \frac{dx}{EI}} \quad \text{elde edilir.} \quad (2.4.14b)$$

2. Hiperstatik Sistemler

Atalet momentinin çubuk boyunca sabit olması durumunda (2.4.14a) eşitliğinde integral alınarak veya doğrudan Çizelge 1.2.1'deki çarpım çizelgesinden yararlanılarak

$$\varphi_i = \frac{L}{3EI} \overline{M}_{ij} - \frac{1}{EI} \int_0^L M_{0x} (L-x) dx \quad (2.4.15)$$

Şeklinde yazılır. Bu (2.4.15) eşitliğinden veya (2.4.14b) eşitliğinde integral alınarak

$$\overline{M}_{ij} = \frac{3EI}{L} \varphi_i + \frac{3}{L^2} \int_0^L M_{0x} (L-x) dx \quad (2.4.16)$$

bulunur. $\varphi_i = \theta_i + \psi_{ij}$ ve $k_{ij} = I/L$ konulursa

$$\overline{M}_{ij} = 3Ek_{ij}(\theta_i + \psi_{ij}) + \frac{3}{L^2} \int_0^L M_{0x} (L-x) dx \quad \text{elde edilir.} \quad (2.4.17)$$

2. Hiperstatik Sistemler

$\theta_i = \delta_{ij} = \psi_{ij} = 0$ için i ucu ankastre mesnet olur ve bu uçtaki $\overline{M}_{ij}$ değeri ankastrelik uç momentine eşittir. O da (2.4.17) eşitliğinin son terimine eşit olur.

$$\overline{M}_{ij} = \frac{3}{L^2} \int_0^L M_{0x} (L - x) dx \quad (2.4.18)$$

Bu değer (2.4.17) eşitliğinde yerine konulursa

$$\overline{M}_{ij} = 3E \frac{I_{ij}}{L_{ij}} (\theta_i + \psi_{ij}) + \overline{M}_{ij} \quad (2.4.19a)$$

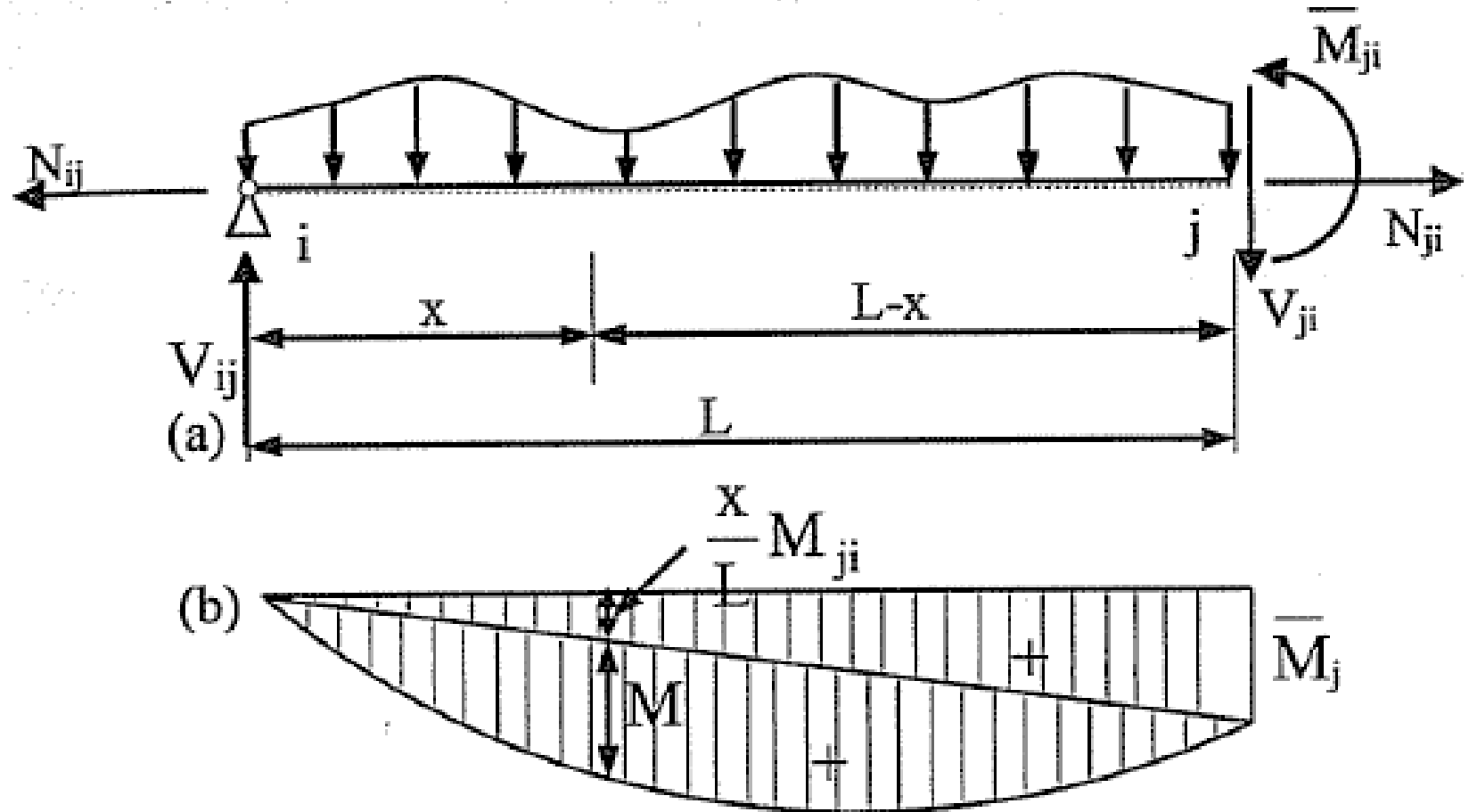
veya

$$\overline{M}_{ij} = 3Ek_{ij} (\theta_i + \psi_{ij}) + \overline{M}_{ij} \quad (2.4.19b)$$

elde edilir.

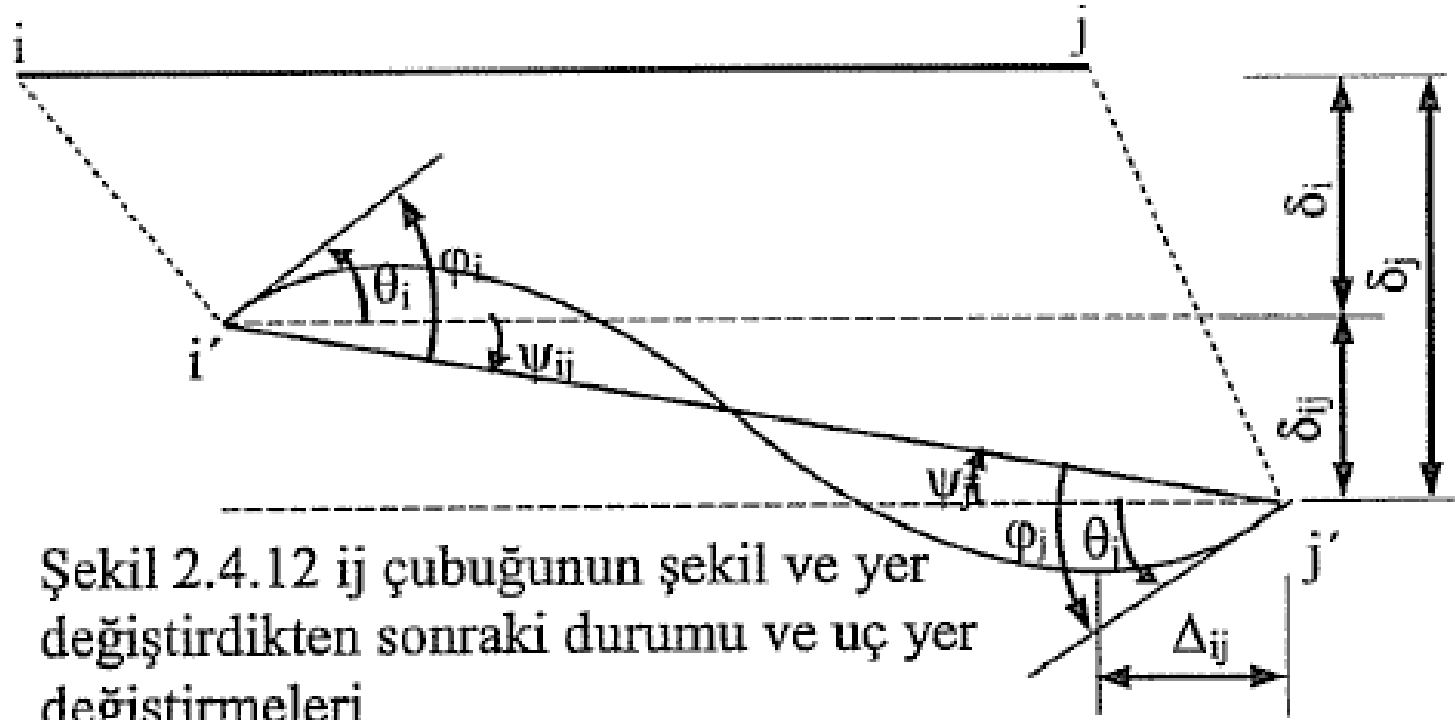
2. Hiperstatik Sistemler

2.4.3.2 Çubuğun sol ucun mafsallı olması durumu

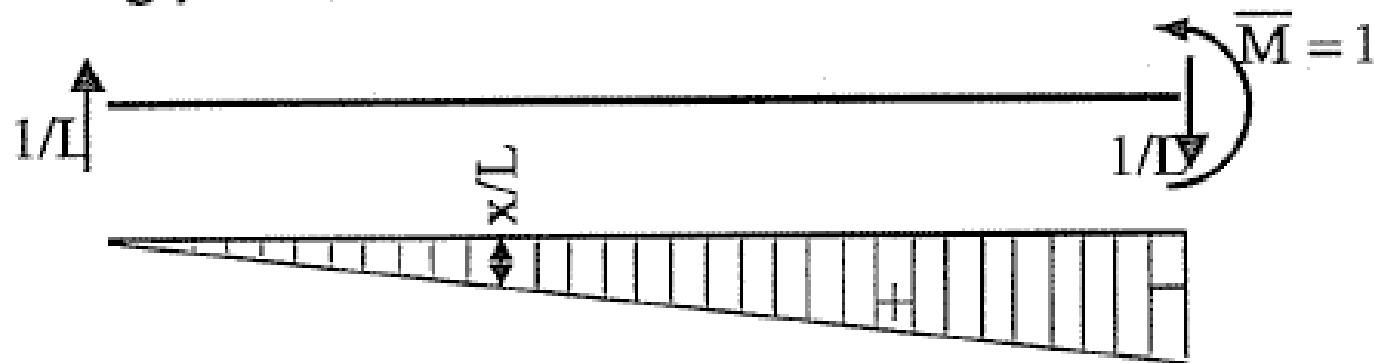


Şekil 2.4.11 Uç kuvvetler ve eğilme momenti

2. Hiperstatik Sistemler



Şekil 2.4.12 ij çubuğunun şekil ve yer değiştirdikten sonraki durumu ve uç yer değiştirmeleri



Şekil 2.4.13 ϕ_j açsını hesaplamak için yapılan birim virtüel yükleme ve eğilme momenti diyagramı

2. Hiperstatik Sistemler

Şekil.2.4.11'de görüldüğü gibi i mesnedi mafsallı (sabit veya çubuk eksenine paralel hareketli mesnet) olduğu zaman $M_{ij} = 0$ olur. Benzer şekilde Şekil 2.4.11b'deki eğilme momenti diyagramı ve Şekil 2.4.13'deki birim virtüel yükleme göz önüne alınır virtüel iş eşitlikleri uygulanırsa veya (2.4.1b) eşitliğinde $M_{ij} = 0$ konulursa

$$\varphi_j = \int_0^L \frac{x^2}{L^2} \frac{\bar{M}_{ji}}{EI} dx + \int_0^L \frac{x}{L} \frac{M_{0x}}{EI} dx \quad (2.4.20a)$$

bulunur. Burada; iki ucu ankastre veya rijit düğüm noktalı çubuktaki uç momentinden farklılığını göstermek için uç momenti $\bar{M}$ ile gösterilmiştir. (2.4.20a) eşitliğinden

$$\bar{M}_{ji} = \frac{EL^2 \varphi_j - L \int_0^L x M_{0x} \frac{dx}{I}}{\int_0^L x^2 \frac{dx}{EI}} \quad \text{şeklinde yazılır.} \quad (2.4.20b)$$

2. Hiperstatik Sistemler

Çubukta atalet momentinin sabit olması durumunda

$$\varphi_j = \frac{L}{3EI} \bar{M}_{ji} + \frac{1}{EIL} \int_0^L M_{0x} x dx \quad (2.4.21)$$

ve buradan

$$\bar{M}_{ji} = \frac{3EI}{L} \varphi_j - \frac{3}{L^2} \int_0^L M_{0x} x dx \quad (2.4.22)$$

ve $\varphi_j = \theta_j + \psi_{ij}$ konularak

$$\bar{M}_{ji} = \frac{3EI}{L} (\theta_j + \psi_{ij}) - \frac{3}{L^2} \int_0^L M_{0x} x dx \quad \text{elde edilir.} \quad (2.4.23)$$

2. Hiperstatik Sistemler

$\theta_j = \delta_{ij} = \psi_{ij} = 0$ için j ucu ankastre mesnet olur ve bu uçtaki $\overline{M}_{ji}$ değeri ankastrelik uç momentine eşittir. O da eşitliğin son terimine eşit olur.

$$\overline{M}_{ji} = -\frac{3}{L^2} \int_0^L M_{0x} x dx \quad (2.4.24)$$

$$\overline{M}_{ji} = 3E \frac{I_{ij}}{L_{ij}} (\theta_j + \psi_{ij}) + \overline{M}_{ji} \quad (2.4.25.a)$$

veya

$$\overline{M}_{ji} = 3Ek_{ij} (\theta_j + \psi_{ij}) + \overline{M}_{ji} \quad (2.4.25.b)$$

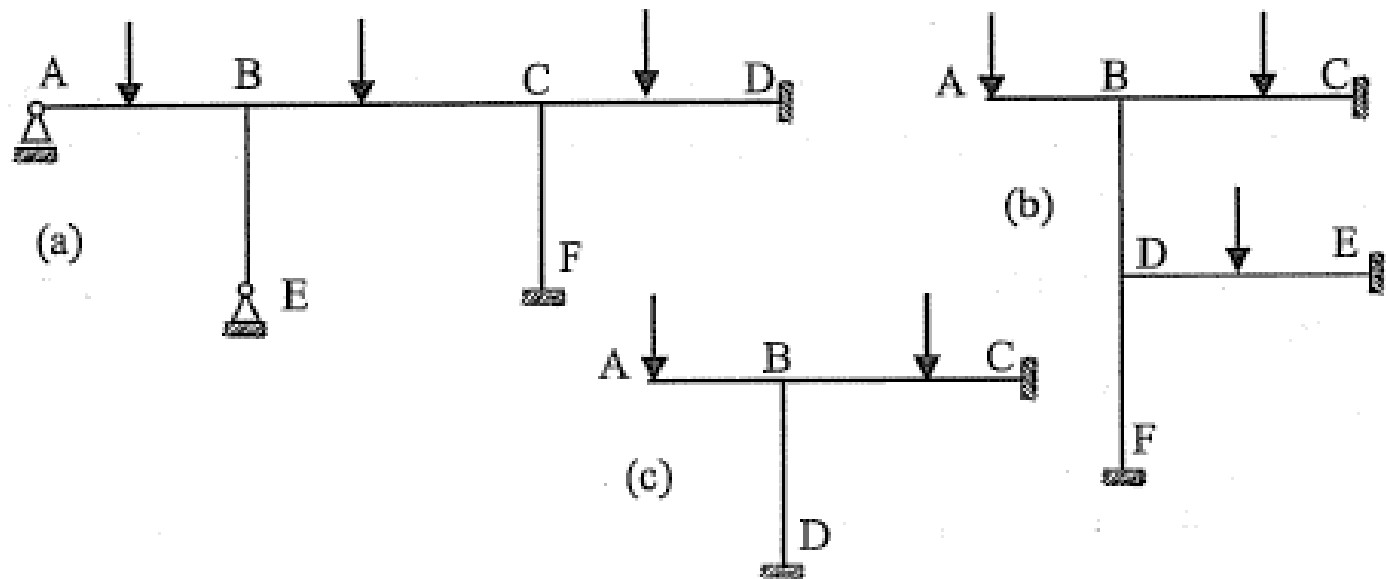
bulunur.



2. Hiperstatik Sistemler

2.4.4 Dügüm Noktaları Sabit Sistemler

Dügüm noktalarındaki doğrusal yer değiştirmeleri sıfır olan diğer bir anlatımla düğüm noktaları doğrusal yer değiştirmeyen sistemlere **düğüm noktaları sabit sistemler** denir. Doğru eksenli çubukların normal kuvvetten meydana gelen Δ boy değişimlerinin göz ardı edildiği bu sistemlerde sadece eğilme şekil değiştirmesi göz önüne alınır. Bu kabul sonucunda her bir çubuktaki çubuk eksenine dik yer değiştirme ile ilgili ψ açısı sıfır olacaktır. Sistemde konsol olarak çalışan çıkma şeklinde çubukların bulunması durumunda bunların uç kuvvetlerinin doğrudan denge şartlarından bulunacağı açıktır.

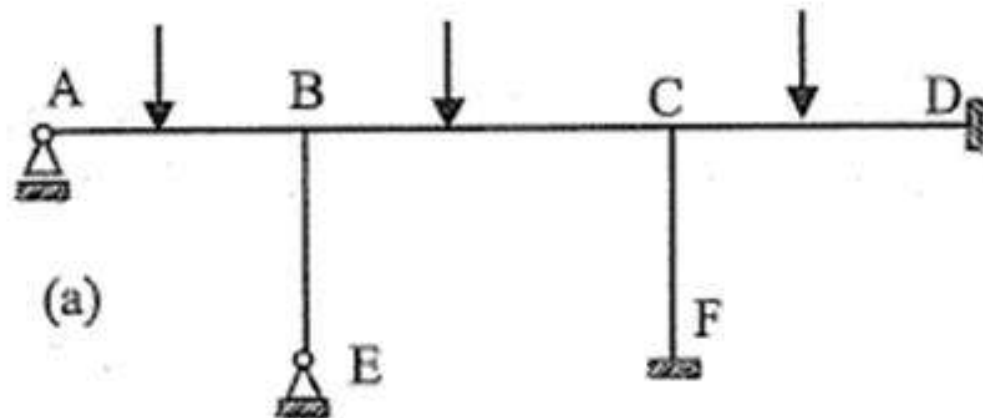


Şekil 2.4.14 Dügüm noktaları gerçekten sabit sistemler

2. Hiperstatik Sistemler

Doğru eksenli düzlem sistemlerde düğüm noktaları sabit sistemlere genelde üç durumda karşılaşılır:

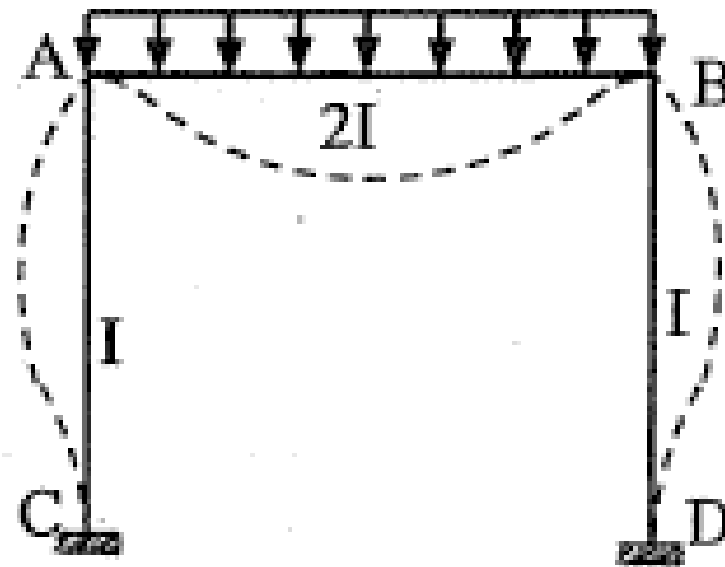
1) Sistemin özelliğinden dolayı bütün yüklemeler için düğüm noktaları sabit sistemler. Şekil 2.4.14a'da AB ve BE çubuklarındaki eksenel boy değişimi göz ardı edildiğinde mesnetler hareket etmedikçe B noktası hareket edemez. B noktası hareket edemezse C noktası da hareket edemez. Dolayısıyla AB, BC, CD, BE ve CF çubuklarının tümünde ψ açısı sıfır olur ve sistem, A ve E uçlarının özel durumu da dikkate alınırsa B ve C noktalarındaki θ_B ve θ_C dönme açılarının hesaplanması ile çözülebilir. Bunun için 5 çubukta uç momentlerini yazıp B ve C düğüm noktalarında $\sum M_B = 0$ ve $\sum M_C = 0$ denge şartlarını yazmak yeterlidir.



Şekil 2.4.14 Düğüm noktaları gerçekten sabit sistemler

2. Hiperstatik Sistemler

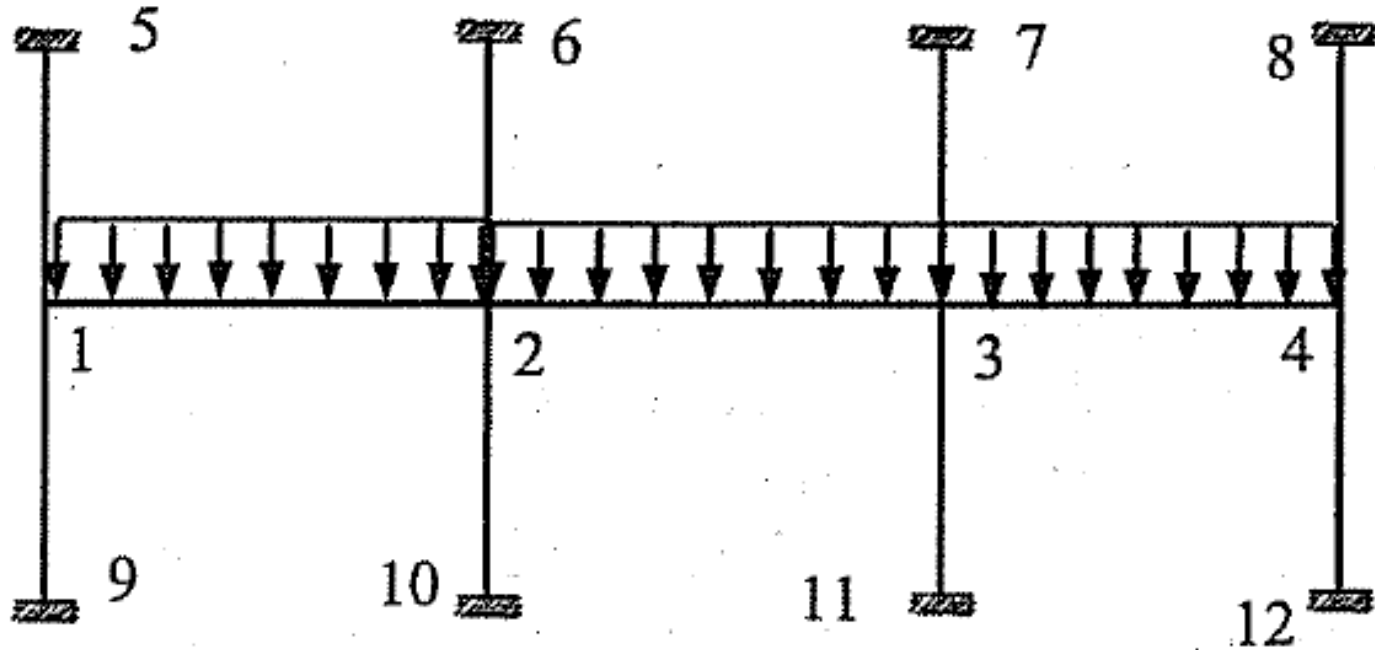
2) Sistemlerin ve yüklerin özelliği dolayısıyla düğüm noktaları sabit sistemler. Şekil 2.4.15'deki simetrik yük altındaki sistem simetriktir. Sistemi çözerken sadece A veya B düğüm noktalarındaki θ_A ve θ_B dönme açılarından birini hesaplamak yetecektir. Simetriden dolayı $\theta_A = -\theta_B$ 'dir.



Şekil 2.4.15 Simetrik sistem

2. Hiperstatik Sistemler

3) Düğüm noktaları yaklaşık olarak sabit kabul edilebilen sistemler. Şekil 2.4.16'da açıklıkları ve üzerindeki yükleri bir birine yakın kat çerçeveleri düğüm noktası sabit sistem gibi düşünülebilir. Bu durumda 1, 2, 3 ve 4 düğüm noktalarının yatay yer değiştirmesi yaklaşık olarak sıfır alınabilir. Düşey çubukların diğer uçları da yatay ve düşey yer değiştirme yapmadığından tüm düğüm noktalarında doğrusal yer değiştirmeler dolayısıyla ψ sıfır olur. Bu durumda θ_1 , θ_2 , θ_3 ve θ_4 açılarını hesaplamak yeterli olacaktır.



Şekil 2.4.16 Kat çerçevesi

2. Hiperstatik Sistemler

2.4.4.1 Düğüm Noktaları Sabit Sistemlerin Açık Yöntemi ile Hesabında İzlenecek Yol

1) Sistemin serbestlik derecesi hesaplanır ve hesaplanacak açılar seçilir. Dış etkiler altında şekil değiştirip denge konumuna gelen düğüm noktaları sabit bir sistemin, şekil değiştirmiş durumunu belirlemek için, rijit düğüm noktalarının θ dönmelerini belirlemek yeterli olmaktadır. Çünkü rijit düğüm noktalarında birleşen çubukların θ uç dönme açıları birbirine eşittir ve düğüm noktalarının doğrusal yer değiştirmeleri sıfırdır. Bundan dolayı bilinmeyen olarak düğüm noktalarının θ dönme açıları seçilir ve bunları belirlemek için de düğüm noktalarının moment denge şartları kullanılır.



2. Hiperstatik Sistemler

2) Bunun için her rijit düğüm noktasında birleşen çubukların aranılan açının bulunduğu uçlarındaki M uç momentlerinin θ dönme açılarına bağlı ifadeleri:

-İki ucu rijit düğüm noktası olan çubuklarda (2.4.10a) ve (2.4.10b) eşitlikleri tekrar yazılır.



Şekil 2.4.17

$$M_{ij} = 2Ek_{ij}(2\theta_i + \theta_j + 3\psi_{ij}) + \mathcal{M}_{ij} \quad (2.4.10a)$$

$$M_{ji} = 2Ek_{ij}(\theta_i + 2\theta_j + 3\psi_{ij}) + \mathcal{M}_{ji} \quad (2.4.10b)$$

ve bu eşitliklerde $\psi_{ij} = 0$ konularak

$$M_{ij} = 2Ek_{ij}(2\theta_i + \theta_j) + \mathcal{M}_{ij} \quad (2.4.26a)$$

$$M_{ji} = 2Ek_{ij}(\theta_i + 2\theta_j) + \mathcal{M}_{ji} \quad (2.4.26b)$$

elde edilir.

2. Hiperstatik Sistemler

-Sol ucu rijit düğüm noktası sağ ucu mafsallı (sabit veya çubuk eksenine paralel hareketli mesnet) olan çubuklarda (2.4.19) eşitliği tekrar yazılıp



Şekil 2.4.18

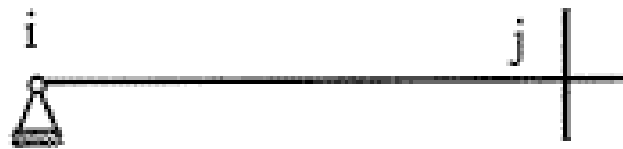
$$\overline{M}_{ij} = 3Ek_{ij}(\theta_i + \psi_{ij}) + \overline{M}_{\bar{j}} \quad (2.4.19)$$

ve bu eşitlikte $\psi_{ij} = 0$ konularak

$$\overline{M}_{ij} = 3Ek_{ij}\theta_i + \overline{M}_{\bar{j}} \quad (2.4.27)$$

elde edilir.

-Sol ucu mafsallı (sabit veya çubuk eksenine paralel hareketli mesnet) ve sağ ucu rijit düğüm noktası olan çubuklarda (2.4.25) eşitliği tekrar yazılıp



Şekil 2.4.19

$$\overline{M}_{ji} = 3Ek_{ij}(\theta_j + \psi_{ij}) + \overline{M}_{\bar{j}}$$

ve bu eşitlikte $\psi_{ij} = 0$ konularak

$$\overline{M}_{ji} = 3Ek_{ij}\theta_j + \overline{M}_{\bar{j}} \quad (2.4.28)$$

şeklinde yazılır.

2. Hiperstatik Sistemler

6) Her çubukta denge eşitlikleri yazılarak V_{0ij} , uç momentleri sıfır olan çubuktaki uç kuvvetleri olmak üzere, çubuk eksenine dik uç kuvvetleri

$$V_{ij} = V_{0ij} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} \quad \text{ve} \quad V_{ji} = V_{0ji} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} \quad (2.4.29a \text{ ve } b)$$

şeklinde hesaplanır.

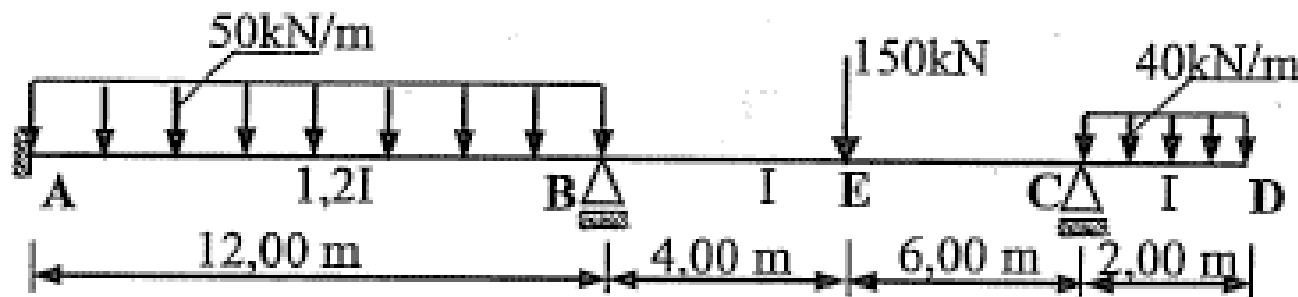
7) Sistemin düğüm noktalarında kullanılmayan $\sum P_x = 0$ ve $\sum P_y = 0$ şartlarından çubuk eksenine paralel N_{ij} uç kuvvetleri hesaplanır.

8) Mesnetlerin bulunduğu uçlardaki uç kuvvetleri ve denge şartları göz önünde tutularak mesnet tepkileri hesaplanır.



2. Hiperstatik Sistemler

Örnek 2.4.1



Şekil 2.4.21

Şekil 2.4.21’de boyutları ve yükleme durumu verilen sürekli kirişte A mesnedi 2 cm, B mesnedi 5 cm ve C mesnedi 4 cm çöktüğüne göre:

- Sistem üzerindeki yüklerden
- Mesnet çökmelerinden

meydana gelen kesit tesirlerini hesaplayınız. $E = 2 \times 10^7 \text{ kN / m}^2$, $I = 0,015 \text{ m}^4$ ’dür.

2. Hiperstatik Sistemler

ÖRNEK 2.4.1

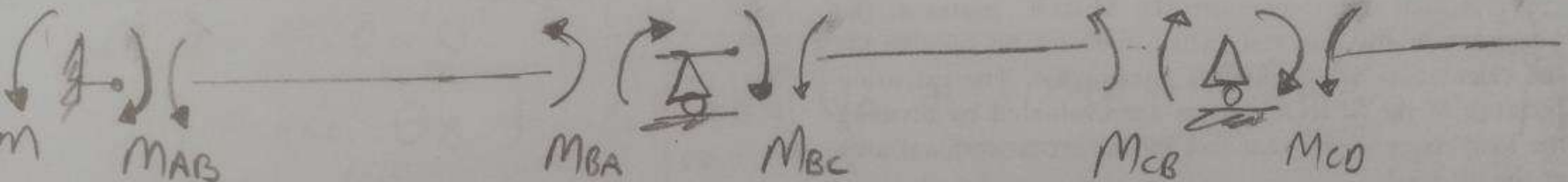
③

Değim Noktaları sabit mi hareketli mi?

A mesnetinde yatay ve dikey hareket

B ve C mesnetlerinde dikey hareket

} 0' olduğundan
değim noktaları sabit



$$\theta_A = 0$$

$$P_{AB} = 0$$

$$P_A = 0$$

$$P_{BC} = 0$$

$$P_B = 0$$

$$\psi = 0 \quad (\text{Dikey yer değ olmadığından})$$

2. Hiperstatik Sistemler

Üç Momentlerin Bulunması

AB çubuğu

$$\underline{A \text{ ucu:}} \quad M_{AB} = 2 E k_{AB} \cdot (2 \overset{\uparrow \theta'}{\theta_A} + \overset{\uparrow \theta'}{\theta_B} + 3 \overset{\uparrow \psi''}{\psi_{AB}}) + \overset{\uparrow \text{anlastirelik}}{\overset{\uparrow \text{Üç moment}}{M_{AB}}}$$

$$M_{AB} = 2 E k_{AB} \cdot \overset{\uparrow \theta'}{\theta_B} + M_{AB}$$

$$\underline{B \text{ ucu:}} \quad M_{BA} = 2 E k_{AB} \cdot (\overset{\uparrow \theta'}{\theta_A} + 2 \overset{\uparrow \theta'}{\theta_B} + 3 \overset{\uparrow \psi''}{\psi_{AB}}) + M_{BA}$$

$$M_{BA} = 4 E k_{AB} \cdot \overset{\uparrow \theta'}{\theta_B} + M_{BA}$$

BC çubuğu

$$\underline{B \text{ ucu:}} \quad M_{BC} = 2 E k_{BC} \cdot (2 \overset{\uparrow \theta'}{\theta_B} + \overset{\uparrow \theta'}{\theta_C} + 3 \overset{\uparrow \psi''}{\psi_{BC}}) + M_{BC}$$

$$M_{BC} = 4 E k_{BC} \cdot \overset{\uparrow \theta'}{\theta_B} + 2 E k_{BC} \cdot \overset{\uparrow \theta'}{\theta_C} + M_{BC}$$

$$\underline{C \text{ ucu:}} \quad M_{CB} = 2 E k_{BC} \cdot (\overset{\uparrow \theta'}{\theta_B} + 2 \overset{\uparrow \theta'}{\theta_C} + 3 \overset{\uparrow \psi''}{\psi_{CB}}) + M_{CB}$$

$$M_{CB} = 2 E k_{BC} \cdot \overset{\uparrow \theta'}{\theta_B} + 4 E k_{BC} \cdot \overset{\uparrow \theta'}{\theta_C} + M_{CB}$$

2. Hiperstatik Sistemler

Düğüm noktalarında Denge Denklemleri:

③

Bölüm 1: $\sum M_{BC} = 0$ $M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$4E k_{AB} \theta_B + M_{BA} + 4E k_{BC} \theta_B + 2E k_{BC} \theta_C + M_{BC} = 0$$

$$4E \theta_B (k_{AB} + k_{BC}) + 2E k_{BC} \theta_C + M_{BA} + M_{BC} = 0$$

C Düzümü

$$M_{CB} + M_{CO} = 0$$

$$2E k_{BC} \theta_B + 4E k_{BC} \theta_C + M_{CB} + 80 = 0$$

$\theta_B = ?$
 $\theta_C = ?$

k rijitlik Faktörleri

$$k_{AB} = \frac{1,2 I}{12} = 0,1 I$$

$$k_{BC} = \frac{I}{10} = 0,1 I$$

A. kesirlik ile yazılabilir:

2. Hiperstatik Sistemler

$$M_{BA} = \frac{-9l^2}{12} = -600 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = P a \cdot \beta^2 = 150 \times 4 \times 0,6^2 = 216 \text{ kNm}$$

$$M_{CB} = -P \cdot b \cdot \alpha^2 = -150 \times 6 \times 0,4^2 = -144 \text{ kNm}$$

BC aralığı

$$\beta = \frac{b}{L} = \frac{6}{10} = 0,6$$
$$\alpha = \frac{a}{L} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$M_{CD} = 40 \times 2 \times 1 = 80 \text{ kNm}$$

θ_B ve θ_C 'nin Bulunması

B dönümü:

$$4EI \theta_B (0,1I + 0,1I) + 2EI (0,1I) \cdot \theta_C - 600 + 216 = 0$$

$$0,8EI \theta_B + 0,2EI \theta_C - 384 = 0$$

C dönümü:

$$2EI (0,1I) \cdot \theta_B + 4EI (0,1I) \cdot \theta_C - 144 + 80 = 0$$

$$0,2EI \theta_B + 0,4EI \theta_C - 64 = 0$$

$$\theta_B = +502,86/EI$$

$$\theta_C = -91,43/EI$$

2. Hiperstatik Sistemler

Sonuç U_0 Momentleri

(4)

$$M_{AB} = 2E(0,1I) \cdot \left(\frac{502,86}{EI} \right) + 600 = 700,57 \text{ kNm}$$

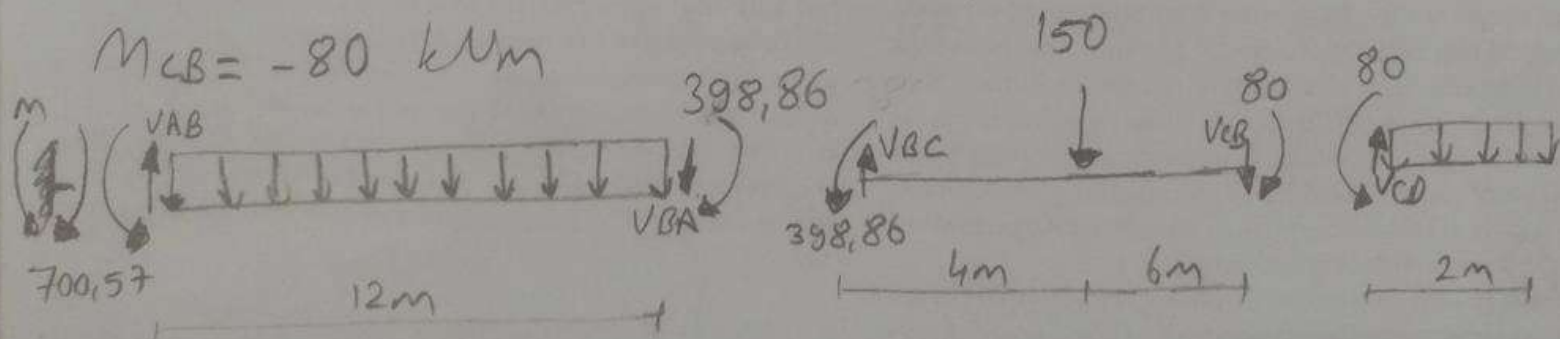
$$M_{BA} = 4E(0,1I) \cdot \left(\frac{502,86}{EI} \right) - 600 = -398,86 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = 4E(0,1I) \cdot \left(\frac{502,86}{EI} \right) + 2E(0,1I) \cdot \left(\frac{-91,43}{EI} \right) + 216$$

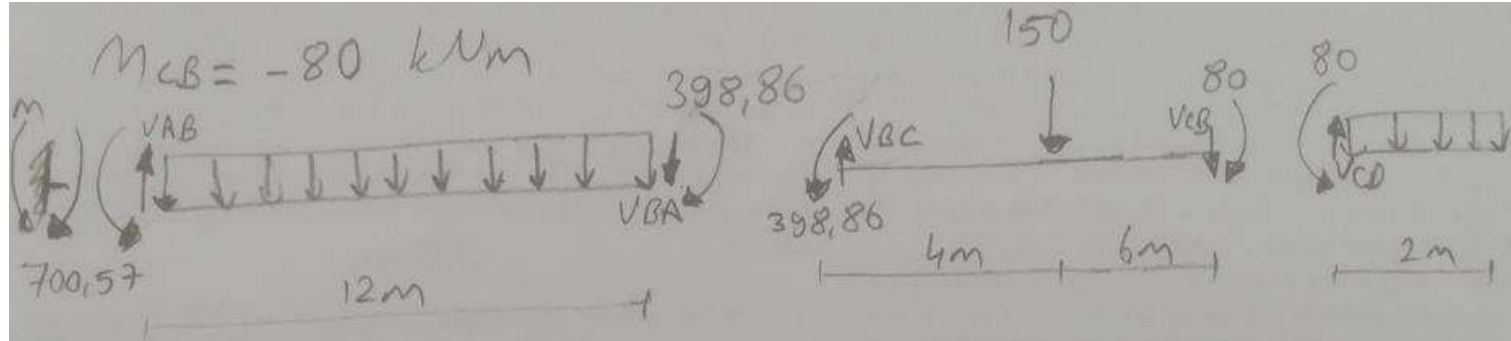
$$M_{BC} = 398,86 \text{ kNm}$$

$$M_{CB} = 2E(0,1I) \cdot \left(\frac{502,86}{EI} \right) + 4E(0,1I) \cdot \left(\frac{-91,43}{EI} \right) - 144$$

$$M_{CB} = -80 \text{ kNm}$$



2. Hiperstatik Sistemler



Kesme Kuvvetleri:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_{AB} \times 12 + 398,86 = 50 \times 12 \times 6 + 700,57$$

$$V_{AB} = 325,14 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BA} = -274,86 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow V_{BC} \times 10 + 80 = 398,86 + 150 \times 6$$

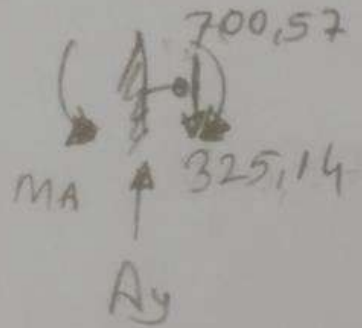
$$V_{BC} = 121,88 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CB} = -28,12$$

$$V_{CD} = 80 \text{ kN}$$

2. Hiperstatik Sistemler

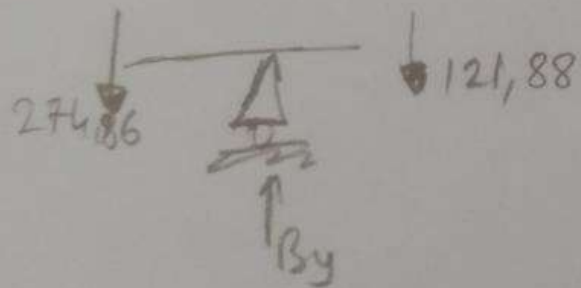
mesnet Tepkileri



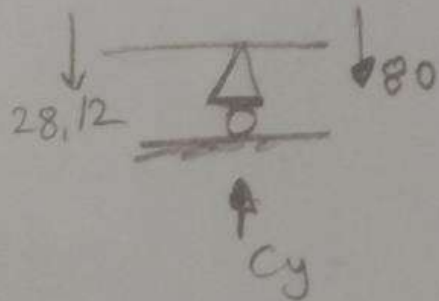
$$A_y = 325,14 \text{ kN}$$

$$M_A = 700,57 \text{ kNm}$$

$$A_x = 0$$

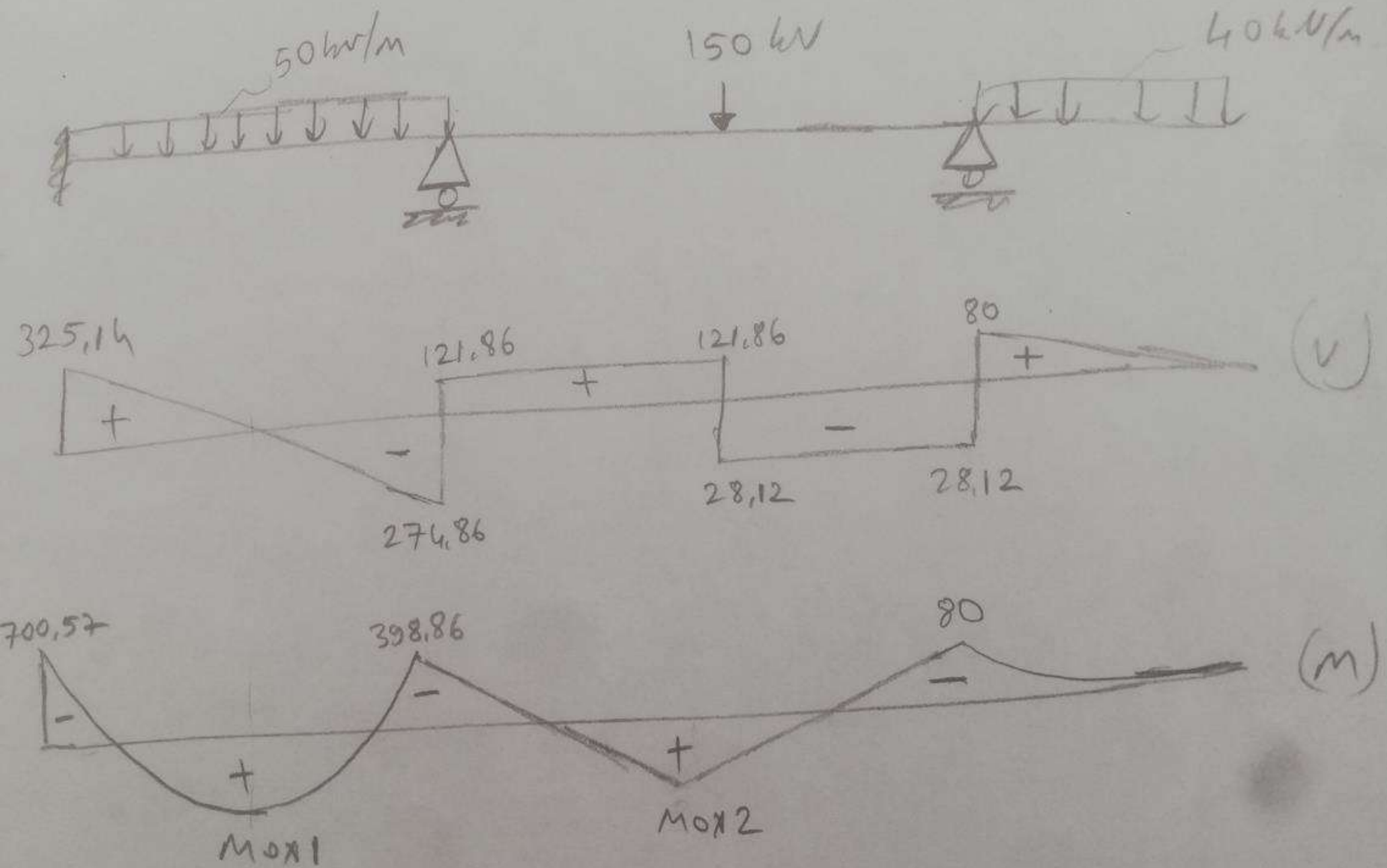


$$B_y = 396,74 \text{ kN}$$

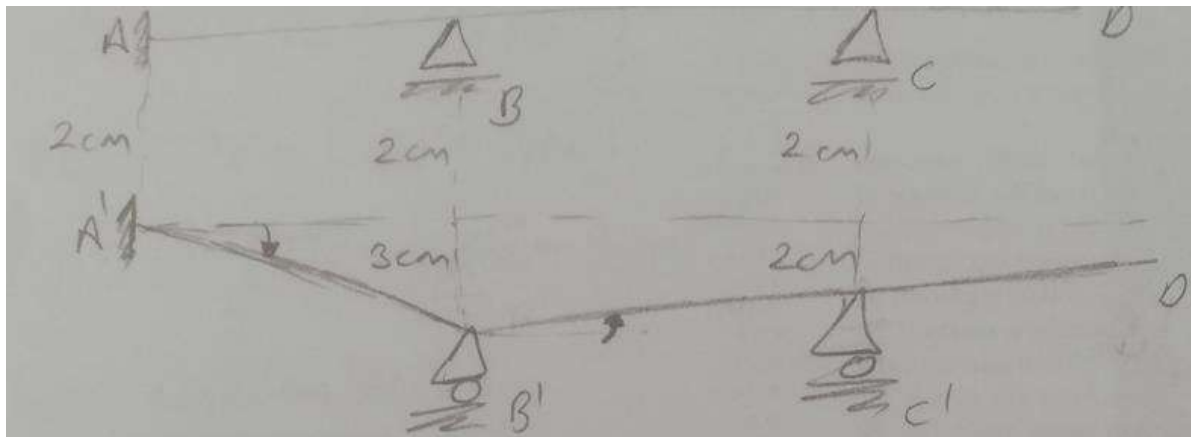


$$C_y = 108,12 \text{ kN}$$

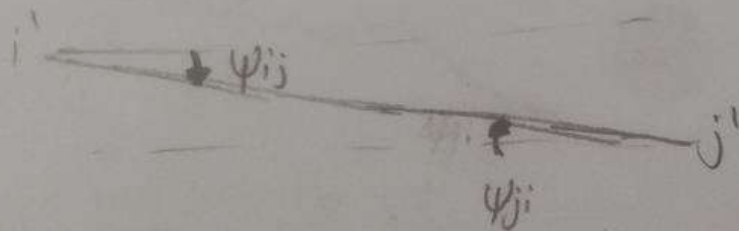
2. Hiperstatik Sistemler



2. Hiperstatik Sistemler



ψ : Elastik eği eğri'nin başlangıç konumuna göre dönme



Saat okretir pozitif.

$$\psi_{AB} = \frac{0,05 - 0,02}{12} = 2,5 \times 10^{-3}$$

2. Hiperstatik Sistemler

Üç Momentler: Bölüm

AB arbuçu

A ucu:

$$M_{AB} = 2 E I_{AB} (2\theta_A + \theta_B + 3\psi_{AB}) + M_{AB}$$

$$M_{AB} = 2 E \cdot 0,1 I (\theta_B + 3 \times 2,5 \times 10^{-3})$$

B ucu:

$$M_{BA} = 2 E I_{AB} (\theta_A + 2\theta_B + 3\psi_{AB}) + M_{AB}$$

$$M_{BA} = 2 E \cdot (0,1 I) \cdot (2\theta_B + 3 \times 2,5 \times 10^{-3})$$

$$M_{BA} = 120.000 \theta_B + 450$$

2. Hiperstatik Sistemler

BC Gubuğu.

B ucu:

$$M_{BC} = 2E \cdot k_{BC} \cdot (2\theta_B + \theta_C + 3\psi_{BC}) + M_{BC}^0$$

$$M_{BC} = 2E(0,1I) \cdot (2\theta_B + \theta_C - 3 \times 10^{-3})$$

C ucu: $M_{CB} = 2E k_{BC} (\theta_B + 2\theta_C + 3\psi_{BC}) + M_{CB}^0$

$$M_{CB} = 2E \cdot (0,1I) \cdot (\theta_B + 2\theta_C - 3 \times 10^{-3})$$

Düğümler noktalarında denklemleri:

B düğümleri: $M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$\underbrace{120.000\theta_B}_{M_{BA}} + 450 + \underbrace{120.000\theta_B + 60000\theta_C}_{M_{BC}} - 180 = 0$$

$$-1/ \quad \boxed{240.000\theta_B + 60.000\theta_C = -270}$$

2. Hiperstatik Sistemler

C Dönümü:

$$M_{CB} + M_{CD}^{\rightarrow 0} = 0$$

$$4/ \quad 60.000 \theta_B + 120.000 \theta_C = 180$$

$$-240.000 \theta_B - 60.000 \theta_C = +270$$

$$240.000 \theta_B + 480.000 \theta_C = 720$$

$$\theta_C = 2,357143 \times 10^{-3}$$

$$\theta_B = -1,71429 \times 10^{-3}$$

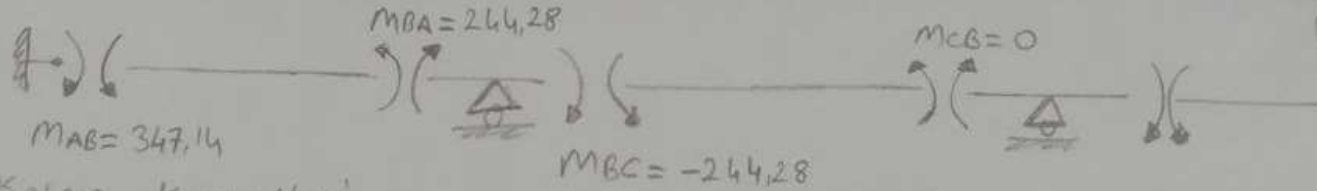
Sonuç Uç Momentleri:

$$M_{AB} = 347,14 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = 244,28 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = -244,28 \text{ kNm}$$

$$M_{CB} = -2,4 \times 10^{-4} \approx 0$$



Kısmi Kuvvetleri

$$V_{AB} \times 12 = 347.14 + 244.28$$

$$V_{AB} = 49.29 \text{ kN}$$

$$V_{BA} = 49.29 \text{ kN}$$

$$V_{BC} \times 10 = -244.28 \text{ kN}$$

$$V_{BC} = -24.43 \text{ kN}$$

$$V_{CB} = -24.43 \text{ kN}$$

Momentler

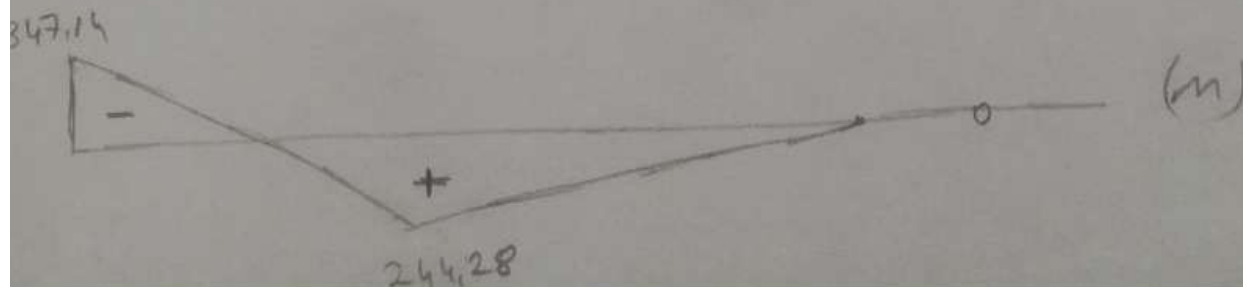
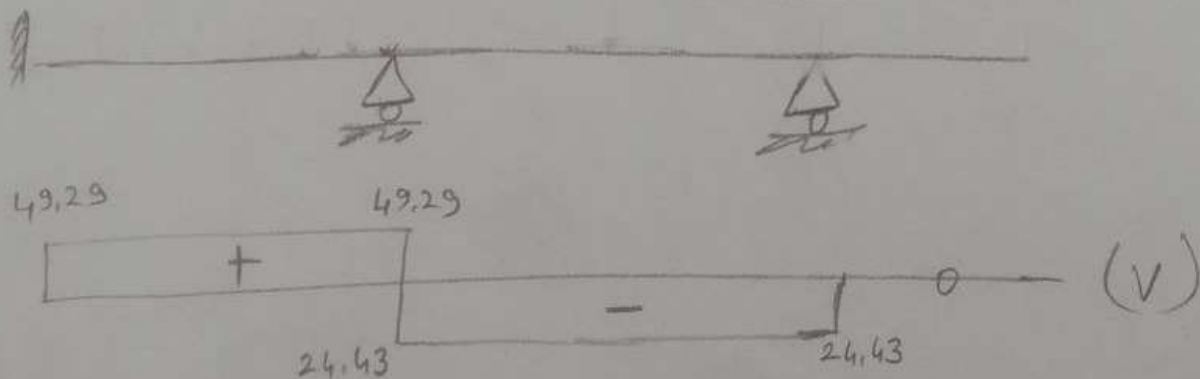
$$M_{AB} = -347.14 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = 244.28 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = 244.28 \text{ kNm}$$

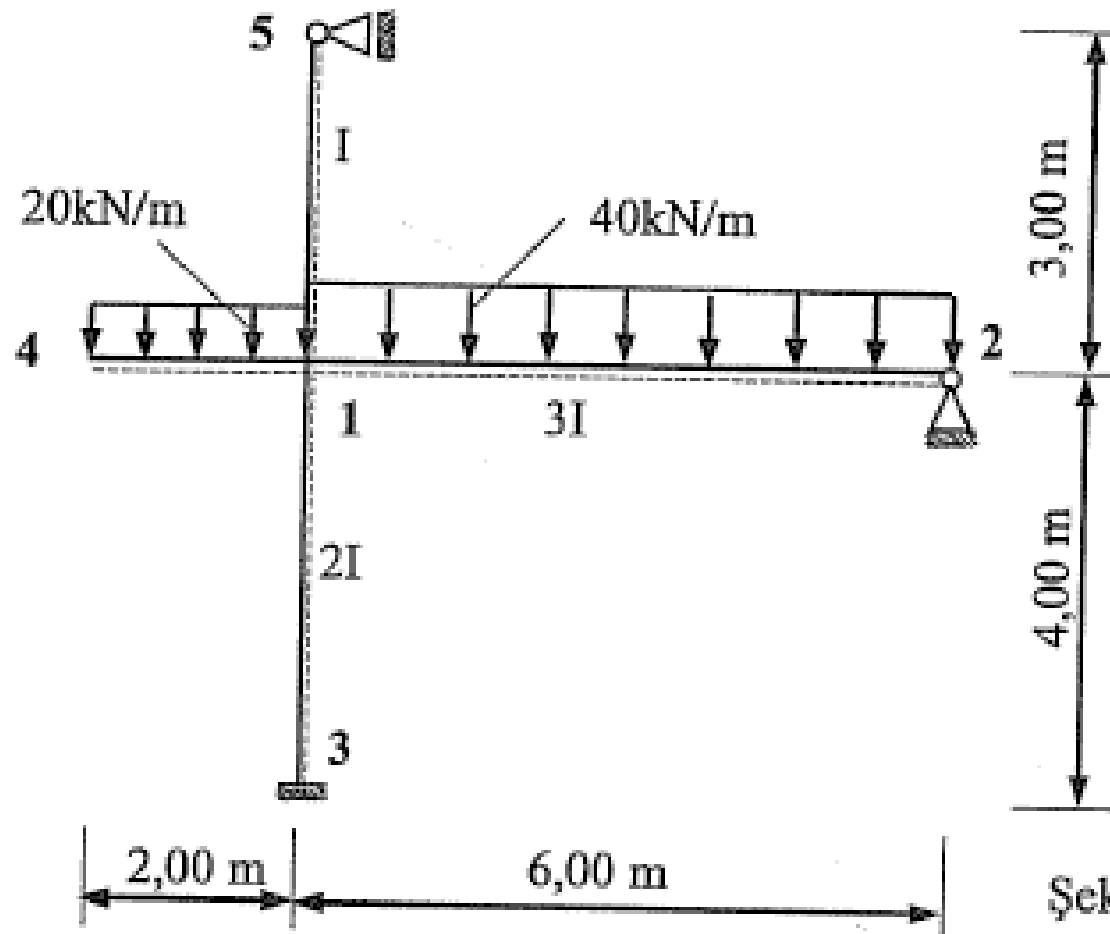
$$M_{CB} = 0$$

Menet Gökmesi Kuvvet Tesisleri



Örnek 2.4.3

Şekil 2.4.30'da yükleme durumu ve boyutları verilen sistemin kesit tesirlerini açı yöntemi ile hesaplayınız.

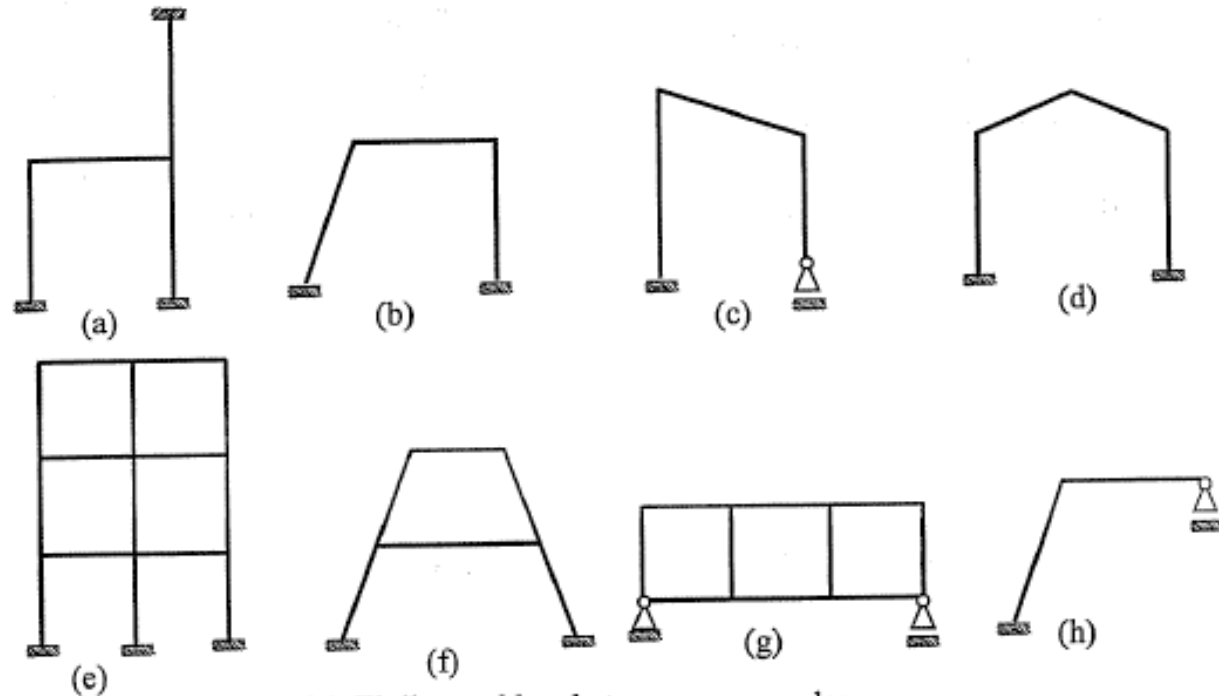


Şekil 2.4.30

2. Hiperstatik Sistemler

2.4.5 Düğüm Noktaları Hareketli Sistemler

En genel rijit çerçeve tipinde, sadece eğilme deformasyonun etkisi göz önüne alındığı zaman bile θ ve ψ bilinmeyen açıları bulunmaktadır. Diğer bir anlatımla düğüm ve kiriş dönmesinin (veya yan hareketin) her ikisi de vardır. Şekil 2.4.34'de bunlarla ilgili birkaç örnek gösterilmiştir. Şekil 2.4.34'de verilen sistemlerde düğüm noktası dönmesinden başka, Şekil 2.4.34a, b, c ve h birer yanal yer değiştirme veya çubuk dönmesi, Şekil 2.4.34d ve f'de ikişer yanal yer değiştirme veya çubuk dönmesi ve Şekil 2.4.34e ve g'de üçer yanal yer değiştirme veya çubuk dönmesi vardır.

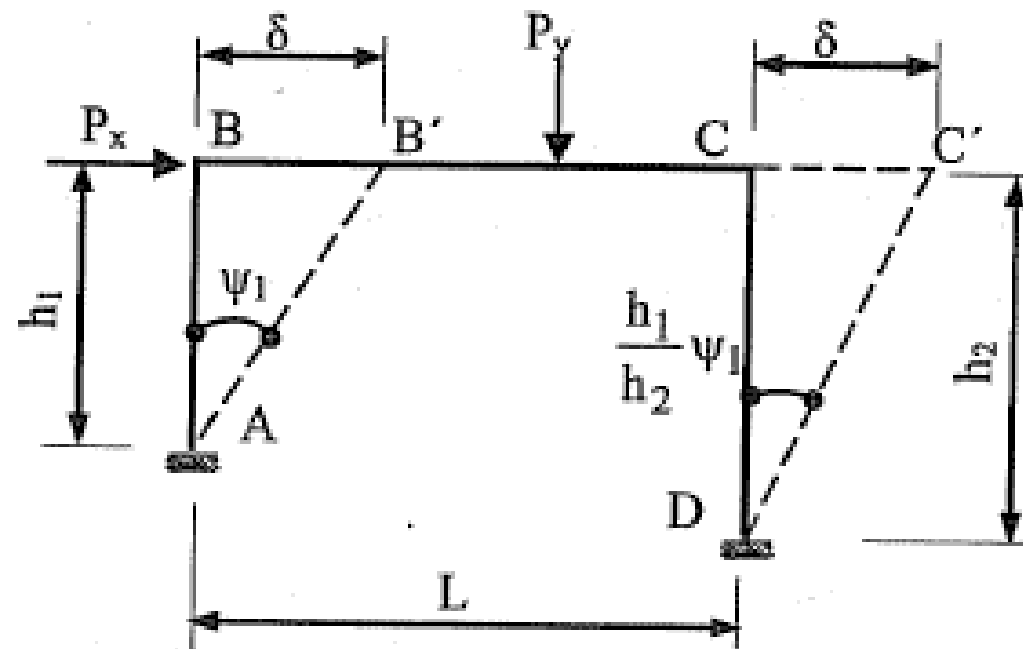


Şekil 2.4.34. Tipik yanal hareket yapan çerçeveler

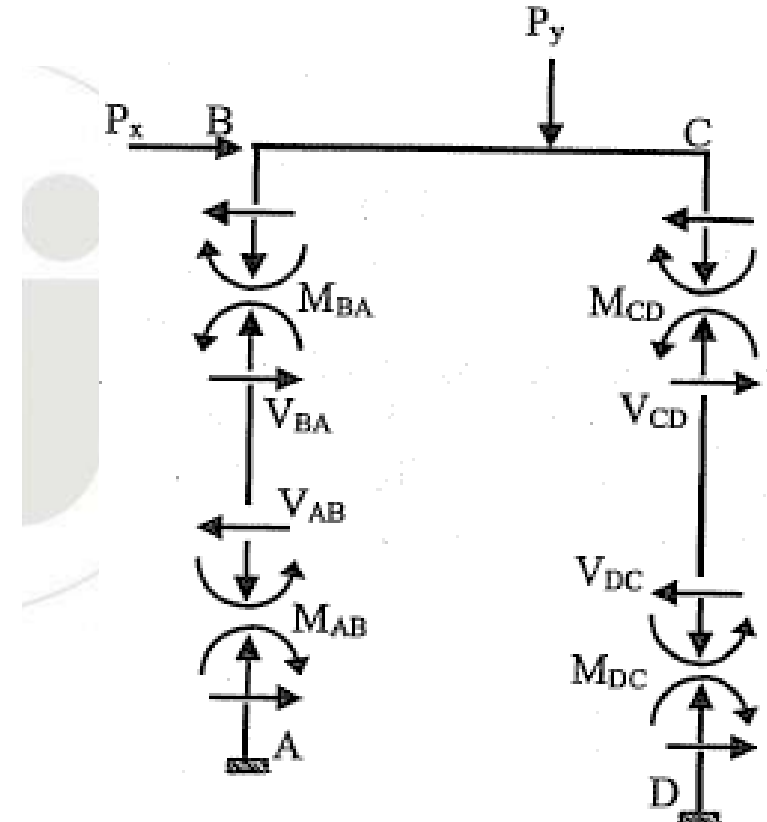
2. Hiperstatik Sistemler

2.4.5.1 Yatay ve düşey çubuklardan oluşan sistemler

Bu konuyu açıklamak için Şekil 2.4.35’de gösterilen çerçeveyi ele alalım. Mesnetler hareket etmediğinden, bilinmeyen olarak θ_B ve θ_C olmak üzere 2 θ açısı vardır. Bu durumda B ve C düğüm noktaları dönmeye olduğu gibi yatay harekete de serbest bırakılmıştır. Normal kuvvet deformasyonu göz ardı edildiğinde ve çubukların kiriş dönmeleri küçük olduğunda B düğüm noktası AB çubuğuna dik (burada yatay olarak) hareket eder.



Şekil 2.4.35 Yanal yer değiştirme



Şekil 2.4.36 Çubuk uç kuvvetleri

2. Hiperstatik Sistemler

Bu durumda yer değiştirme δ 'dır. Aynı anlamda ve aynı sebeple CD kolonunun üst ucundaki C düğüm noktasının da saat akrebi doğrultusunda dönerek yatay olarak hareket etmesi gerekir. BC çubuğunun boy kısılması göz ardı edildiğinden C nin yatay yer değiştirmesi de δ kadar olmalıdır. Elastik eğri kirişlerinin yer değiştirme durumları Şekil 2.4.35'de kesik çizgi ile gösterilmiştir. Bu düz kesik çizgiler çubuğun elastik eğrisini değil basitçe elastik eğri kirişlerini gösterir. Şekil 2.4.35'den de görüldüğü gibi $\psi_{BC} = 0$,

$$\psi_{AB} = \frac{\delta}{h_1} = \psi_1 \quad (2.4.34)$$

$$\psi_{DC} = \frac{\delta}{h_2} \quad (2.4.35)$$

ve (2.4.34) eşitliğinden $\delta = h_1 \psi_1$ yazılır ve (2.4.35) eşitliğinde yerine konulursa

$$\psi_{DC} = \frac{h_1}{h_2} \psi_1 \quad \text{elde edilir.} \quad (2.4.36)$$

2. Hiperstatik Sistemler

Bu durumda çerçeve çubuklarının ψ açısı da bir bağımsız bilinmeyen olarak tanımlanabilir. Burada bu ψ_1 olarak tanımlanmıştır. Bu durumda uç momentlerinin değerleri bilinmeyen olarak θ_B , θ_C ve ψ_1 'i içerecektir. Bilinmeyenleri hesaplamak için gerekli olan 3 eşitlikten ikisi B ve C düğüm noktalarındaki moment denge şartlarından elde edilir. 3. statik bağımsız denge eşitliği uç kuvvetlerin dengesini sağlayacak başka bir denge şartından elde edilir. Bu aşağıda gösterilmeye çalışılacaktır. Kolonları, kirişe ve mesnede bağlanan uçlarından keserek bu uçlardaki uç kuvvetleri ve üzerindeki dış yüklerle birlikte ayrı bir cisim gibi düşünelim. Keza kirişi de kolon üst uçlarından keserek kolon uçlarındaki uç kuvvetleri ve kiriş üzerindeki yüklerle ayrı bir cisim gibi düşünelim. Şekil 2.4.36'da görülen her bir serbest cisimde denge şartları yazılırsa

$$\text{AB çubuğunda moment denge şartından } M_{AB} + M_{BA} - V_{BA}h_1 = 0 \quad (2.4.37)$$

$$\text{CD çubuğunda moment denge şartından } M_{DC} + M_{CD} - V_{CD}h_2 = 0 \quad (2.4.38)$$

2. Hiperstatik Sistemler

$$\text{BC çubuğunda } \sum P_x = 0 \text{ denge şartından } V_{BA} + V_{CD} - P_x = 0 \quad (2.4.39)$$

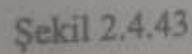
elde edilir. V_{BA} ve V_{CD} 'nin 2.4.38 ve 2.4.39 eşitliklerinden bulunan değerleri (2.4.37) eşitliğinde yerine konulursa

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{h_1} + \frac{M_{DC} + M_{CD}}{h_2} = P_x$$

elde edilir ve tüm terimler h_1 ile çarpılarak

$$M_{AB} + M_{BA} + \frac{h_1}{h_2} (M_{DC} + M_{CD}) = h_1 P_x \quad (2.4.40)$$

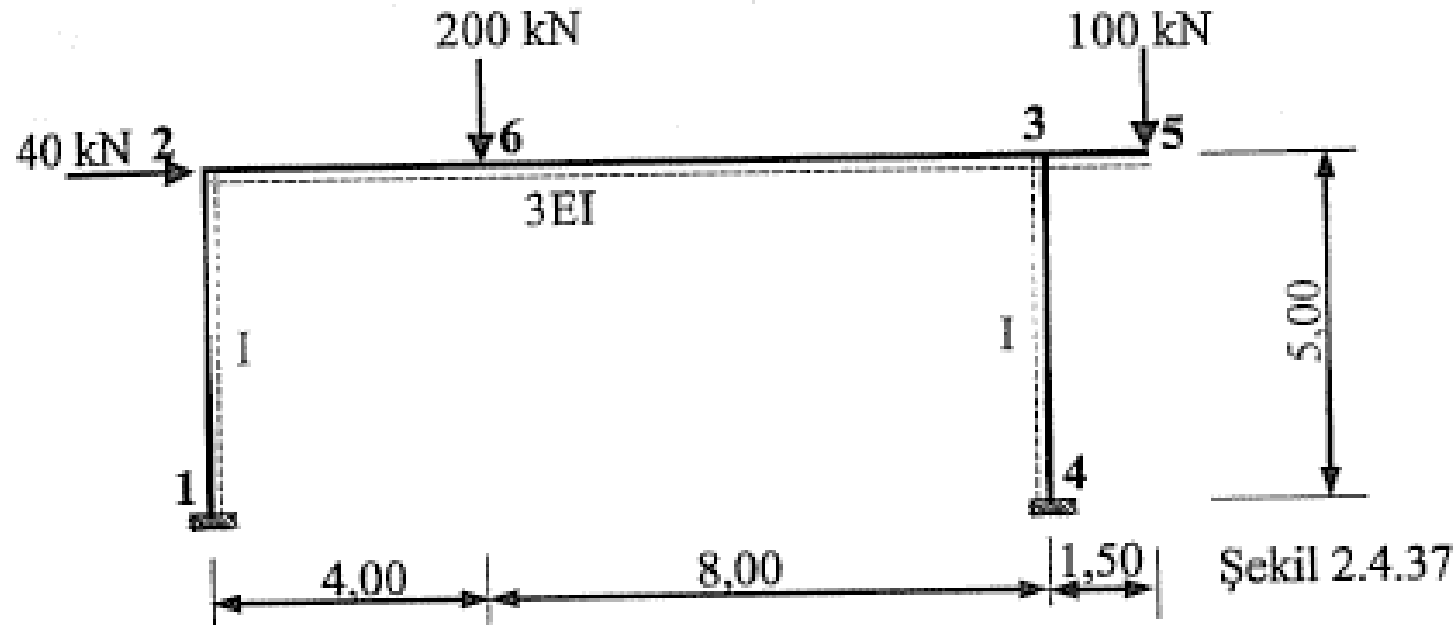
yazılır. Böylece 3. Bağımsız statik eşitlik elde edilmiş olur. Bu üçüncü eşitlik **kesme eşitliği** olarak isimlendirilir. İki düğüm noktası moment eşitliği ve kesme kuvveti eşitliği olmak üzere üç eşitlikten θ_B , θ_C ve ψ_1 hesaplanır.


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{L_1}{h_1}, \cos \alpha = \frac{h_1}{L_{AB}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{L_3}{h_2}, \cos \beta = \frac{h_2}{L_{CD}}$$

$$BB' = \delta, CC' = \delta, BB' = \frac{\delta}{\cos \alpha}, B'B'' = \delta \cdot \operatorname{tg} \alpha, CC' = \frac{\delta}{\cos \beta},$$

2. Hiperstatik Sistemler

Örnek 2.4.4



Şekilde 2.4.37'de yükleme durumu ve boyutları verilen sistemde kesit tesirlerini hesaplayınız ve diyagramlarını çiziniz $E = 2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $I = 20800 \text{ cm}^4$ 'dür.

2. Hiperstatik Sistemler

Bilinmeyenler: $\theta_2, \theta_3, \psi_1$

$$\psi_1 = \psi_{12} = \psi_{34} = \psi_{23} = \psi_{21} = \frac{p_{12}}{h} = \frac{p_{34}}{h} = \frac{p}{h}$$
$$\psi_{23} = 0 \quad \theta_1 = 0 \quad \theta_4 = 0$$

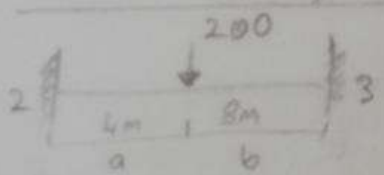
Rijitlik Faktörleri ve Ankastrelik uç momentlerini belirleyip denklemlerimizi kuralım.

Rijitlik Faktörleri:

$$k_{12} = k_{34} = \frac{I}{5} = 0,2 I$$
$$k_{23} = \frac{3I}{12} = 0,25 I$$

Ankastrelik Uç Momentleri:

2-3 grubu


$$a = \frac{4}{12} = 0,333$$
$$\beta = \frac{8}{12} = 0,667$$
$$M_{23} = P \cdot a \cdot \beta^2 = 200 \cdot 4 \cdot 0,667^2 = 356 \text{ kNm}$$
$$M_{32} = -P \cdot b \cdot a^2 = -200 \cdot 8 \cdot 0,333^2 = -177,62 \text{ kNm}$$

2. Hiperstatik Sistemler

$$M_{34} = 2 E k_{34}^{0,21} (2\theta_3 + \theta_4 + 3\psi_{34}) + M_{34}^0 \quad (16)$$

$$M_{34} = 0,8 EI \theta_3 + 1,2 EI \psi_{12}$$

$$M_{43} = 2 E k_{34}^{0,21} (\theta_3 + 2\theta_4 + 3\psi_{34}) + M_{43}^0$$

$$M_{43} = 0,4 EI \theta_3 + 1,2 EI \psi_{12}$$

Düğüm Noktalarının Denge Denklemleri:

2 Nolu Düğüm Noktası:

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$0,8 EI \theta_2 + 1,2 \psi_{12} + EI \theta_2 + 0,5 EI \theta_3 + 356 = 0$$

$$1,8 EI \theta_2 + 0,5 EI \theta_3 + 1,2 EI \psi_{12} + 356 = 0 \quad (1)$$

3 Nolu Düğüm noktası:

$$M_{32} + M_{34} + M_{35} = 0$$

$$0,5 EI \theta_2 + EI \theta_3 - 177,42 + 0,8 EI \theta_3 + 1,2 EI \psi_{12} + 150 = 0$$

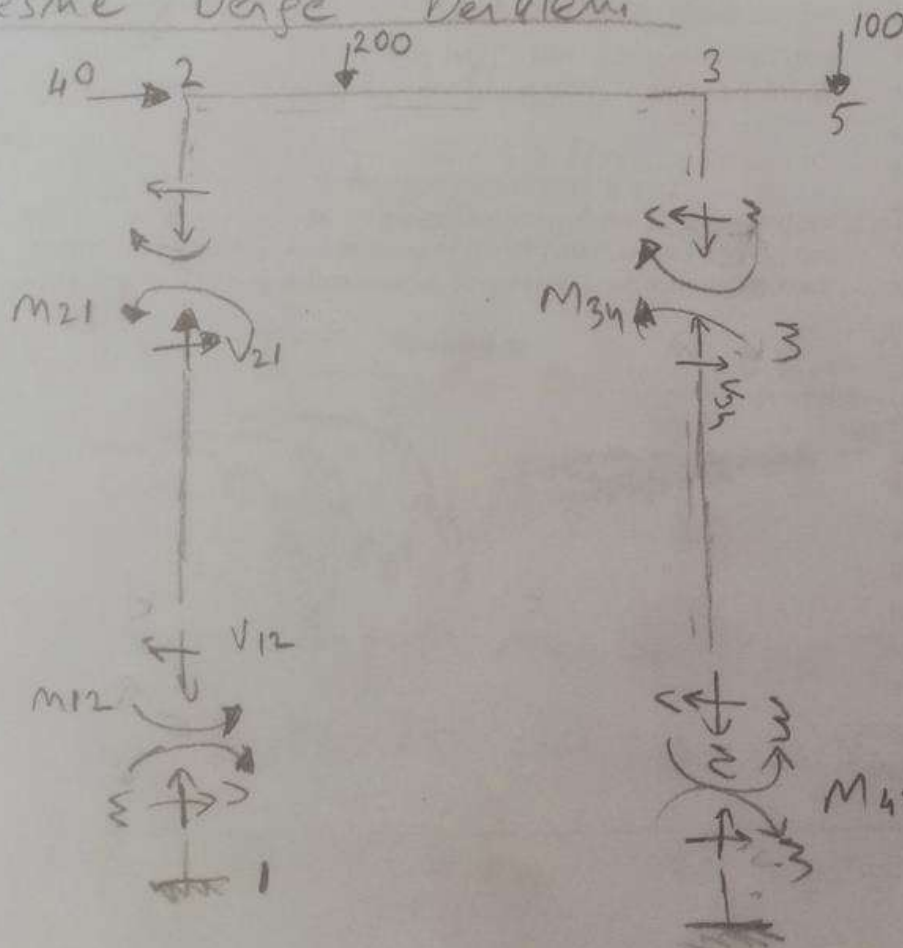
$$0,5 EI \theta_2 + 1,8 EI \theta_3 + 1,2 EI \psi_{12} - 27,42 = 0 \quad (2)$$

2. Hiperstatik Sistemler

$$0,5EI\theta_2 + EI\theta_3 - 177,42 + 0,8EI\theta_3 + 1,2EI\psi_{12} + 150 = 0$$

$$\boxed{0,5EI\theta_2 + 1,8EI\theta_3 + 1,2EI\psi_{12} - 27,42 = 0} \quad (2)$$

Kesme Denge Denklemi



1-2 arbutun da $\sum M_1 = 0$

$$V_{21} = \frac{M_{12} + M_{21}}{5}$$

$$V_{34} = \frac{M_{34} + M_{43}}{5}$$

$$\sum F_x = 0 \quad V_{21} + V_{34} = 40$$

$$M_{12} + M_{21} + M_{34} + M_{43} = 200$$

2. Hiperstatik Sistemler

$$0,4 EI \theta_2 + 1,2 \psi_{12} + 0,8 EI \theta_2 + 1,2 \psi_{12} + 0,8 EI \theta_3 + 1,2 EI \psi_{12} + 0,4 EI \theta_3 + 1,2 EI \psi_{12} = 200$$

$$\boxed{1,2 EI \theta_2 + 1,2 EI \theta_3 + 4,8 EI \psi_{12} = 200}$$

→ 3 adet denklemden ψ_{12} 'yi de 1 'in 2 'de yerine koyarsak

$$\theta_2 = -\frac{273,52}{EI}$$

$$\theta_3 = \frac{21,41}{EI}$$

$$\psi_{12} = \frac{104,69}{EI}$$

Denklemlerde yerine yazarsak

Sonuç U_4 momentleri:

$$M_{12} = 16,22 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -93,19 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 93,19 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = -292,76 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = 142,76 \text{ kNm}$$

(Kesit Tesiri Depil!!)

2. Hiperstatik Sistemler

$\leftarrow V_{32}$

$$M_{23} = 551,15 \text{ kNm}$$
$$M_{32} = -292,76 \text{ kNm}$$
$$M_{34} = 162,76 \text{ kNm}$$
$$M_{43} = 134,16 \text{ kNm}$$

(kesit tesirleri deyi...)

Kesit Tesirleri:

Kırma Kuvveti Değerleri (Kesit tesirleri)

$$V_{21} = V_{12} = \frac{M_{12} + M_{21}}{5} = \frac{16,22 - 93,19}{5} = -15,39 \text{ kN}$$

2-3 aralığında $\sum M_3 = 0$

$$V_{23} \times 12 = M_{23} + M_{32} + 200 \cdot 8$$
$$V_{23} = 116,70 \text{ kN} \rightarrow V_{26} = V_{62} = 116,70$$
$$\sum F_y = 0 \quad V_{52} + 200 = V_{23} \Rightarrow V_{32} = -83,30 \text{ kN} \Rightarrow V_{36} = V_{63}$$
$$V_{34} = V_{43} = \frac{M_{34} + M_{43}}{5} = 55,39 \text{ kN}$$
$$V_{25} = V_{53} = 100$$

2. Hiperstatik Sistemler

$$M_{12} = -16,22 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -93,19 \text{ kNm}$$

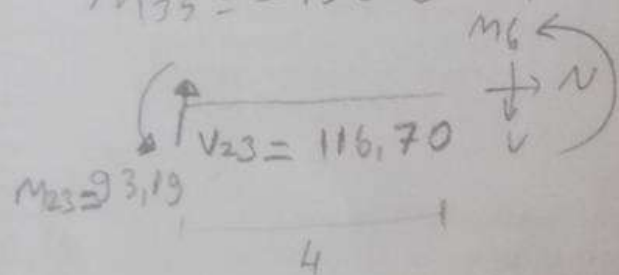
$$M_{23} = -93,19 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = -292,76 \text{ kNm}$$

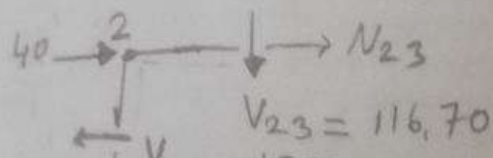
$$M_{34} = -142,76 \text{ kNm}$$

$$M_{43} = 134,14 \text{ kNm}$$

$$M_{35} = -150 \text{ kNm}$$


$$M_6 + 93,19 = 116,70 \times 4 \quad (\text{M den})$$
$$M_6 = 373,61 \text{ kNm}$$

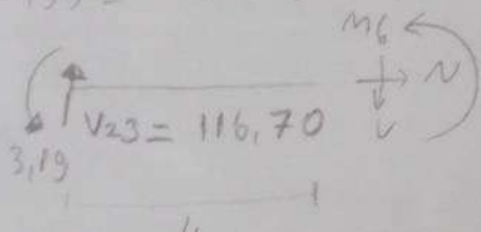
Normal kuvvet Değerleri (Kesit tesirleri) :


$$N_{21} + 116,70 = 0$$
$$N_{21} = -116,70 \text{ kN}$$

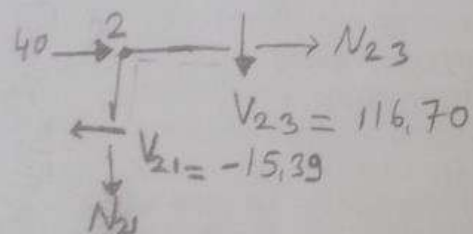
$$\sum F_y = 0 \quad N_{21} + 116,70 = 0$$

$$N_{21} = -116,70 \text{ kN}$$

2. Hiperstatik Sistemler

$M_{35} = -150 \text{ kNm}$

 $M_6 + 93,19 = 116,70 \times 4 \quad (M_0 \times)$
 $M_6 = 373,61 \text{ kNm}$

Normal kuvvet Değerleri (Kesit etkileri) :

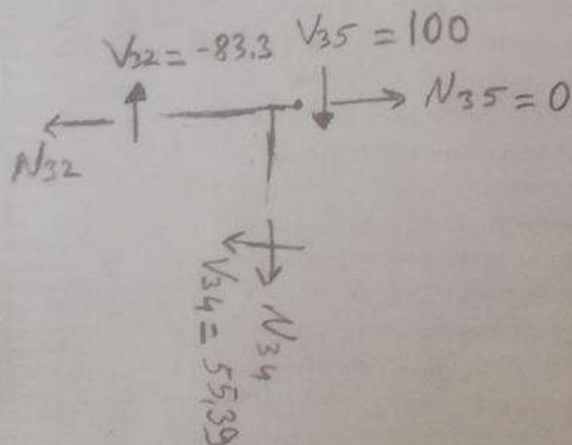


$$\sum F_y = 0 \quad N_{21} + 116,70 = 0$$

$$N_{21} = -116,70 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{23} + 40 = -15,39$$

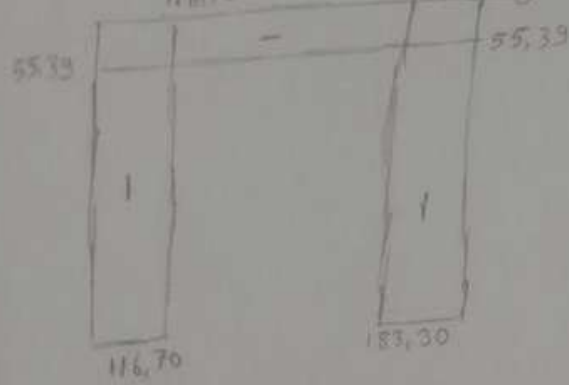
$$N_{23} = -55,39 \text{ kN}$$



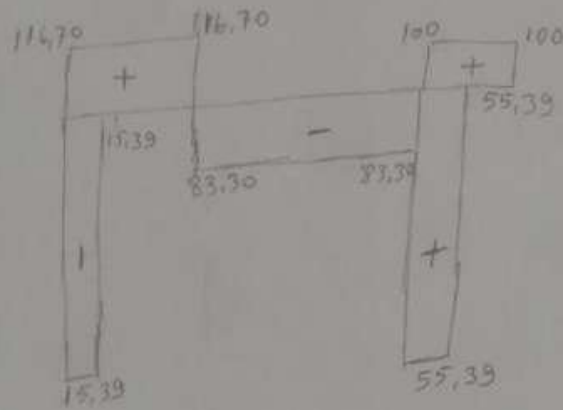
$$\sum F_y = 0$$

$$N_{34} + 100 = -83,30 \Rightarrow N_{34} = -183,30$$

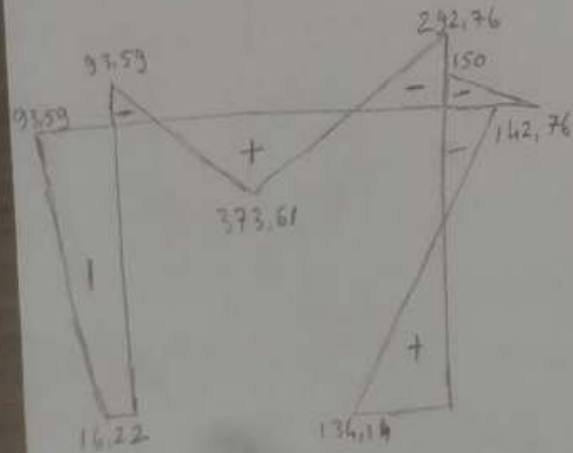
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{32} + 55,39 = 0 \Rightarrow N_{32} = -55,39$$



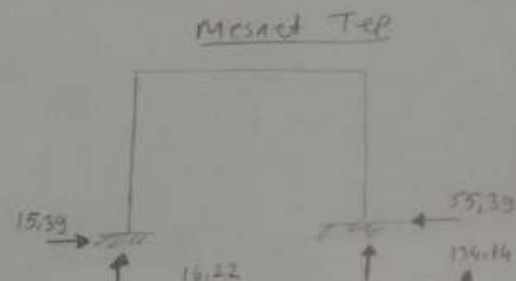
(N)



(V)

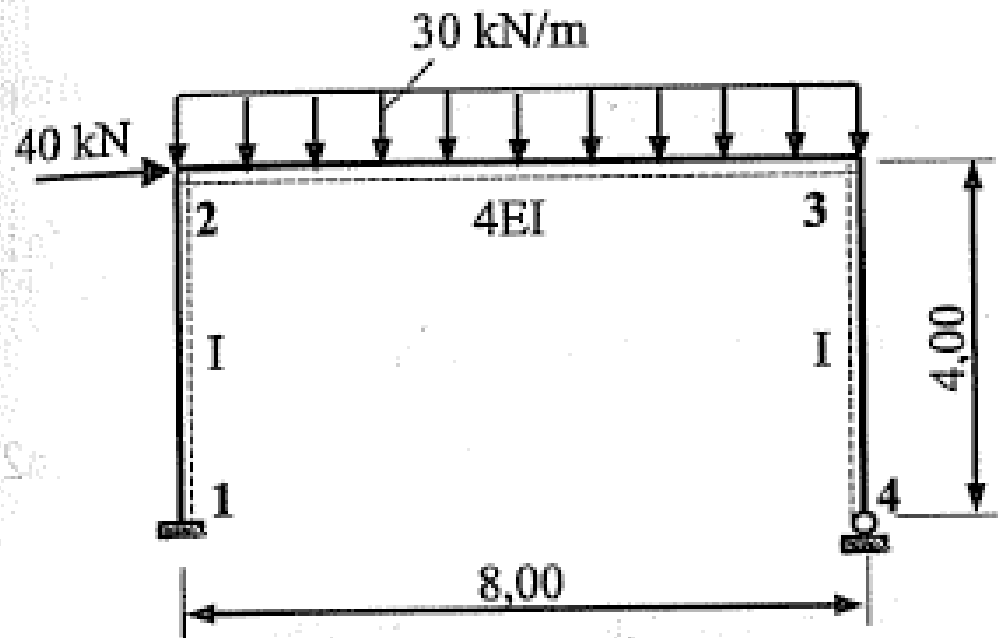


(M)



Örnek 2.4.5

Şekil 2.4.41'de yükleme durumu ve boyutları verilen sistemde kesit tesirlerini hesaplayınız ve diyagramlarını çiziniz.



Şekil 2.4.41