



İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yapı Statikliği II Dersi

Doç. Dr. Müslüm Murat MARAŞ

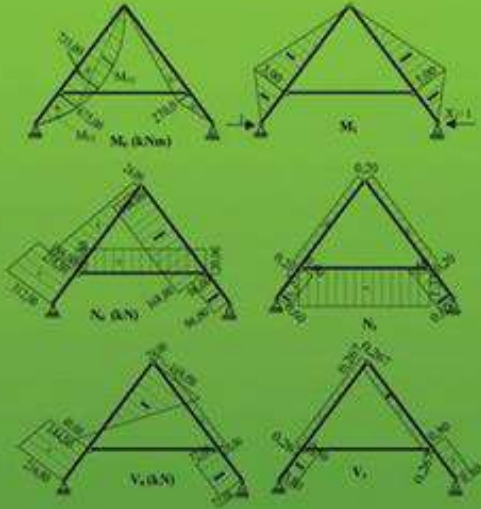
Malatya - 2026

Kaynaklar

BİRSEN YAYINEVİ

YAPI STATİĞİ II

YAPI SİSTEMLERİNDE YER DEĞİŞTİRMELERİN
VE
HİPERSTATİK SİSTEMLERİN
HESAP YÖNTEMLERİ



Prof. İbrahim EKİZ

GÜNCELLETİLMİŞ
3.
BASKI

YAPI STATİĞİ II

Yapı Sistemlerinde Yer
Değıştirmelerin Ve Hiperstatik
Sistemlerin Hesap Yöntemleri

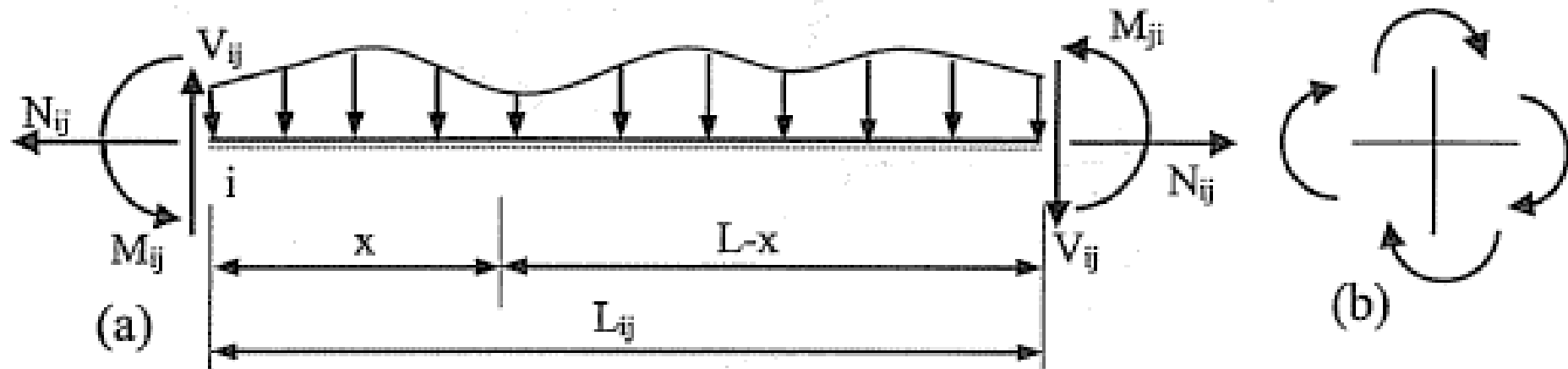
Prof. Dr. İbrahim EKİZ

2. Hiperstatik Sistemler

2.5 CROSS-MOMENT DAĞITIM YÖNTEMİ

Moment dağıtım yöntemi genel olarak düğüm noktaları yer değiştirme yapmayan rijit düğüm noktalı sistemlerin (çerçeve ve sürekli kirişlerin) elle hesabında büyük kolaylıklar sağlar. Bu yöntem 1932 yılında Hardy Cross tarafından ortaya konmuş olduğundan genel olarak Cross yöntemi olarak anılır ve hiperstatik sistemlerin hesabı için kullanılan bir iterasyon (ardışık yaklaşım) yöntemidir.

2.5.1.Tanımlar



Şekil 2.5.1 Çubuk uç kuvvetleri ve pozitif yönleri

2. Hiperstatik Sistemler

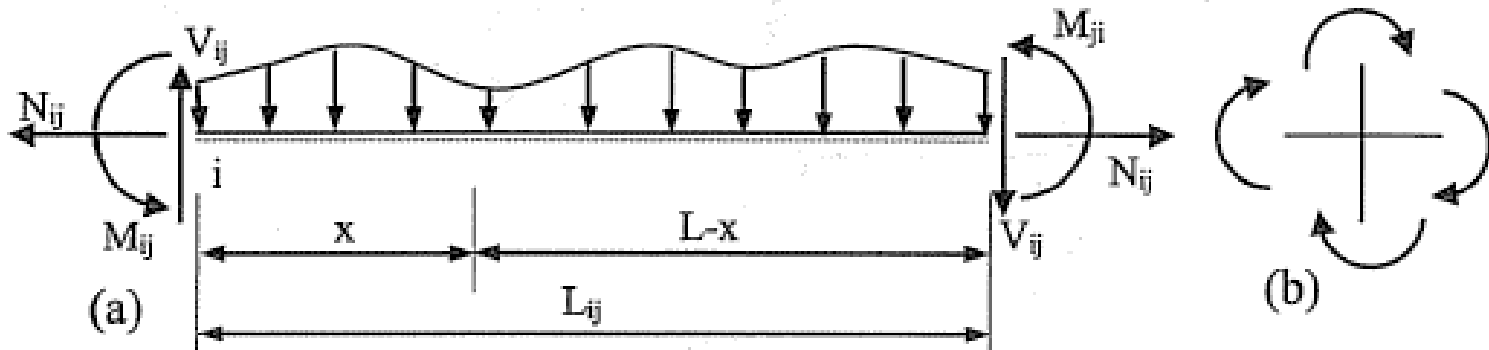
2.5.1.1 Uç Kuvvetleri

Çubuğun iki ucuna etkiyen kuvvetlere uç kuvvetler denir.

M_{ij} , M_{ji} : Sırayla çubuğun i ve j uçlarında etkiyen momentlerdir. Bunlara uç momentleri denir. Düğüm noktalarını saat akrebi, çubuğu saat akrebi tersi yönünde döndüren momentler pozitif kabul edilir (Şekil 2.5.1).

V_{ij} , V_{ji} : Sırayla çubuğun i ve j uçlarında etkiyen uç kuvvetlerinin çubuk eksenine dik bileşenidir. Çubuğu kesme kuvveti gibi saat akrebi yönünde döndüren kuvvetler pozitif kabul edilir (Şekil 2.5.1).

N_{ij} , N_{ji} : Sırayla çubuğun i ve j uçlarında etkiyen uç kuvvetlerinin çubuk eksenine paralel bileşenidir. Normal kuvvet gibi çubuğu uzatmaya çalışan kuvvetler pozitif kabul edilir (Şekil 2.5.1).



Şekil 2.5.1 Çubuk uç kuvvetleri ve pozitif yönleri

2. Hiperstatik Sistemler

Basit kirişte dış yüklerden meydana gelen çubuk eksenine dik uç kuvvetleri V_0 ile gösterilirse ij çubuğunda çubuk eksenine dik çubuk kuvvetleri

$$V_{ij} = V_{0ij} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} \quad (2.5.1a)$$

$$V_{ji} = V_{0ji} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} \quad (2.5.1b)$$

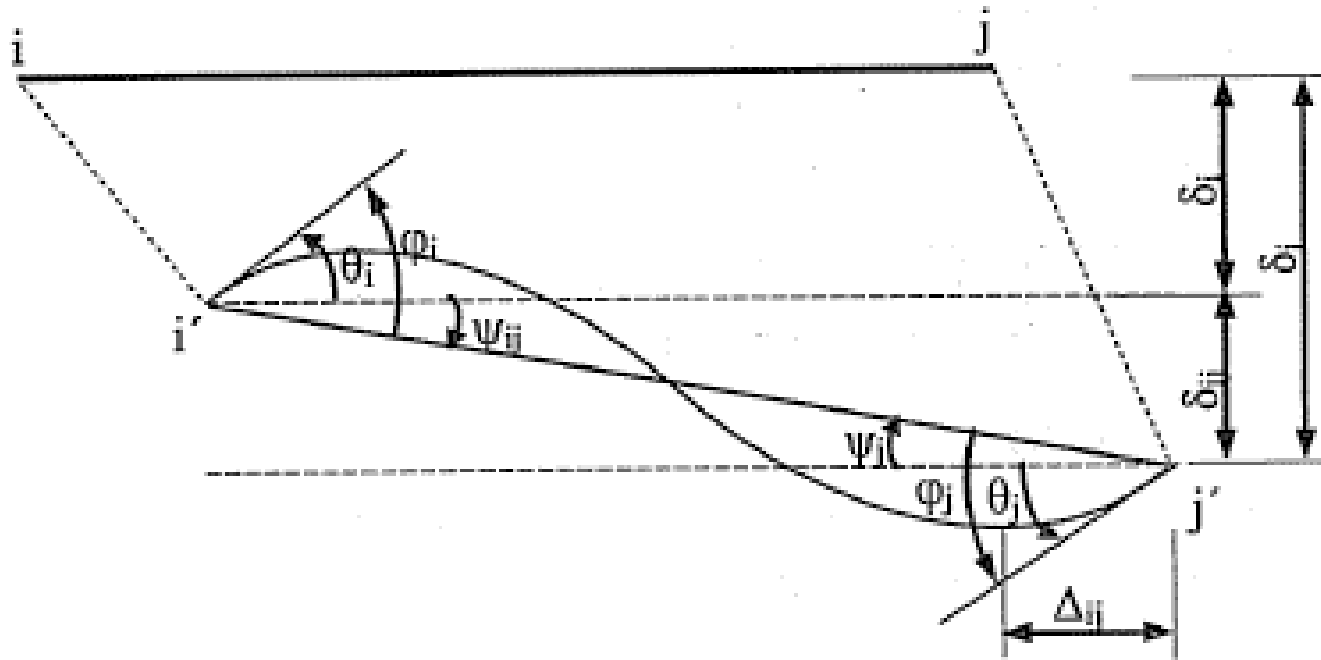
yazılır. Buradan görüldüğü gibi V uç kuvvetleri V_0 basit kiriş uç kuvveti ve uç momentlerine bağlı olarak bulunabilir.



2. Hiperstatik Sistemler

2.5.1.2 Uç Yer Değiştirmeleri

Çubuğun iki ucundaki dönme açısı ve yer değiştirmelerine uç yer değiştirmeleri denir.



Şekil 2.5.2 ij çubuğunun uç yer değiştirmeleri ve pozitif yönleri

θ_i ve θ_j : Sırayla ij çubuğunun i ve j uçlarında Elastik eğri teğetinin çubuğun ilk konumuna göre dönme açısıdır. Saat akrebi tersi yönünde pozitif kabul edilir (Şekil 2.5.2).

2. Hiperstatik Sistemler

ψ_{ij} : ij çubuğunun Elastik eğri kirişinin çubuğun başlangıç konumuna göre dönme açısıdır. Saat akrebi yönünde pozitif kabul edilir. Bu aynı zamanda çubuğun iki ucu arasındaki çubuk eksenine dik rölatif yer değiştirmesi nedeni ile çubuk ilk konumu ve deforme olmuş eksen (elastik eğri kirişi) arasındaki dönme açısıdır. Açı çok küçük olduğundan tanjantı kendisine eşittir (Şekil 2.5.2).

$$\psi_{ij} = \delta_{ij} / L_{ij} \quad (2.5.2)$$

δ_{ij} : ij çubuğunun i ucunun j ucuna göre rölatif yer değiştirmesinin çubuk eksenine dik doğrultudaki izdüşümüdür. Bir uç diğerine göre saat akrebi yönünde dönünce pozitif kabul edilir. Genelde i ucunun çubuk eksenine dik yer değiştirmesi δ_i ve j ucunun çubuk eksenine dik yer değiştirmesi δ_j ve i ucunun j ucuna göre rölatif yer değiştirmesi $\delta_{ij} = \delta_j - \delta_i$ 'dir (Şekil 2.5.2).

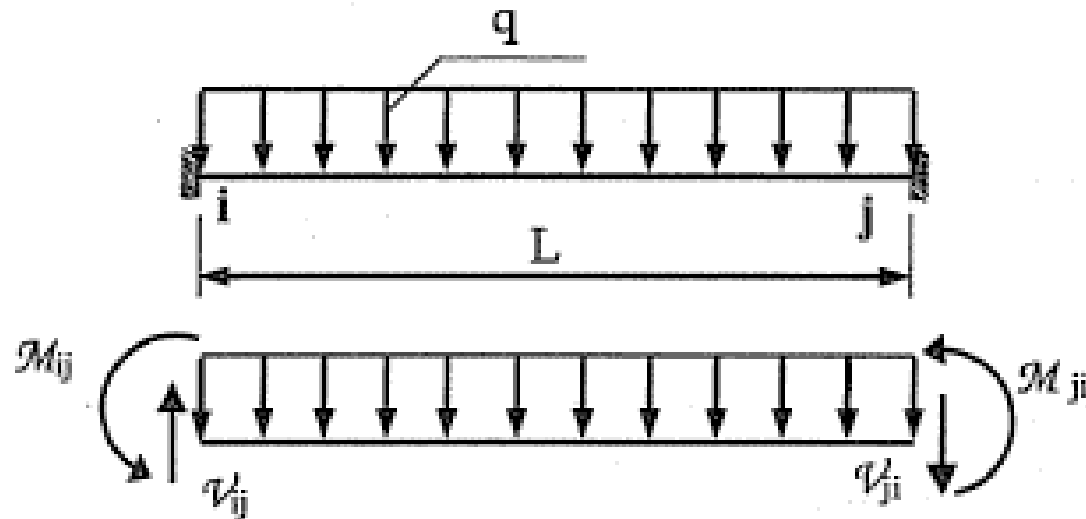
Δ_{ij} : ij Çubuğunun i ucunun diğer j ucuna göre rölatif yer değiştirmesinin çubuk eksenine doğrultusundaki izdüşümüdür. İki uç birbirinden uzaklaştığı zaman pozitif kabul edilir (Şekil 2.5.2).

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.2 Ankastrelik Uç Momentleri

2.5.2.1 İki ucu ankastre çubuk

i ve j uçlarında uç yer değiştirmeleri sıfır olan kirişlere iki ucu ankastre kiriş denir. Bu uçlardaki uç momentlerine de ankastrelik uç momenti denir ve $\mathcal{M}_{ij}$ ile gösterilir. Konu ile ilgili detaylı bilgi 2.4 açı yöntemi bölümünde (2.4.2.4) paragrafında da verilmiştir. Aşağıda hatırlatma için tekrar özet olarak verilmiştir. Şekil 2.5.3'de iki ucu ankastre ve düzgün yayılı yüklü kiriş gösterilmiştir.



Şekil 2.5.3

2. Hiperstatik Sistemler

Atalet momenti sabit çubuklar için açı yönteminde anlatıldığı gibi ankastrelik uç momentleri virtüel iş yönteminden

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{2}{L^2} \left[2 \int_0^L M_{0x} (L - x) dx - \int_0^L M_{0x} x dx \right] \quad (2.5.3a)$$

$$\mathcal{M}_{ji} = \frac{2}{L^2} \left[\int_0^L M_{0x} (L - x) dx - 2 \int_0^L M_{0x} x dx \right] \quad (2.5.3b)$$



2. Hiperstatik Sistemler

$$\mathcal{R} = \frac{6}{L^2} \int_0^L M_{0x} x \cdot dx \quad (2.5.3c)$$

$$\mathcal{L} = \frac{6}{L^2} \int_0^L M_{0x} (L - x) \cdot dx \quad (2.5.3d)$$

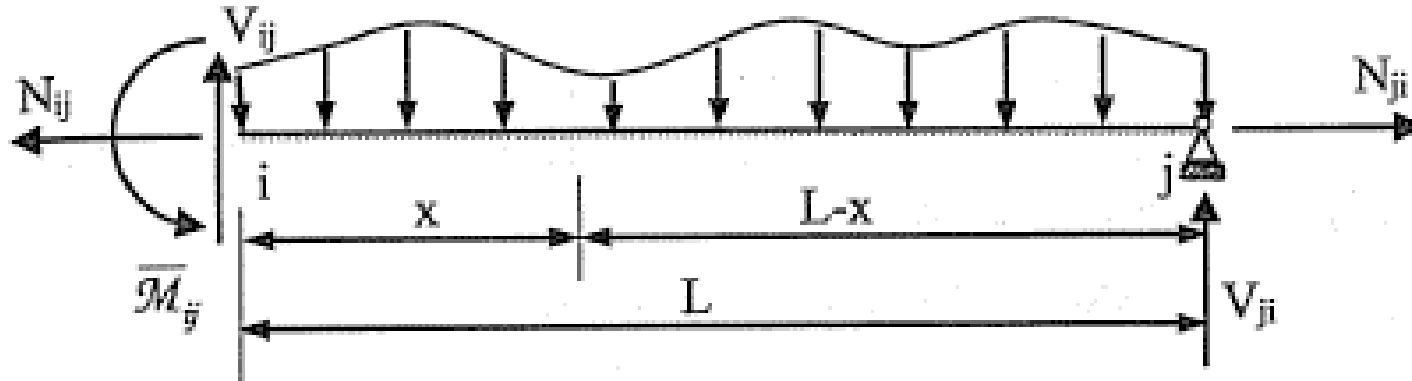
ile gösterilir yerine konulur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{2\mathcal{L} - \mathcal{R}}{3} \quad \text{ve} \quad \mathcal{M}_{ji} = \frac{\mathcal{L} - 2\mathcal{R}}{3} \quad (2.5.3e \text{ ve } f)$$

şeklinde yada kuvvet yönteminden bulunur. Değişik yükler için ankastrelik uç momentleri Çizelge 2.4.1'de verilmiştir.

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.2.2 Sağ ucu mafsallı sol ucu ankastre çubuk



Şekil 2.5.4

Şekil 2.5.4'de görüldüğü gibi sağ ucu mafsallı sol ucu rijit düğüm noktası olan bir çubukta ankastrelik uç momenti genel olarak (2.4.18) eşitliğinden

$$\overline{M}_y = \frac{3}{L^2} \int_0^L M_{0x} (L - x) dx \quad (2.5.4a)$$

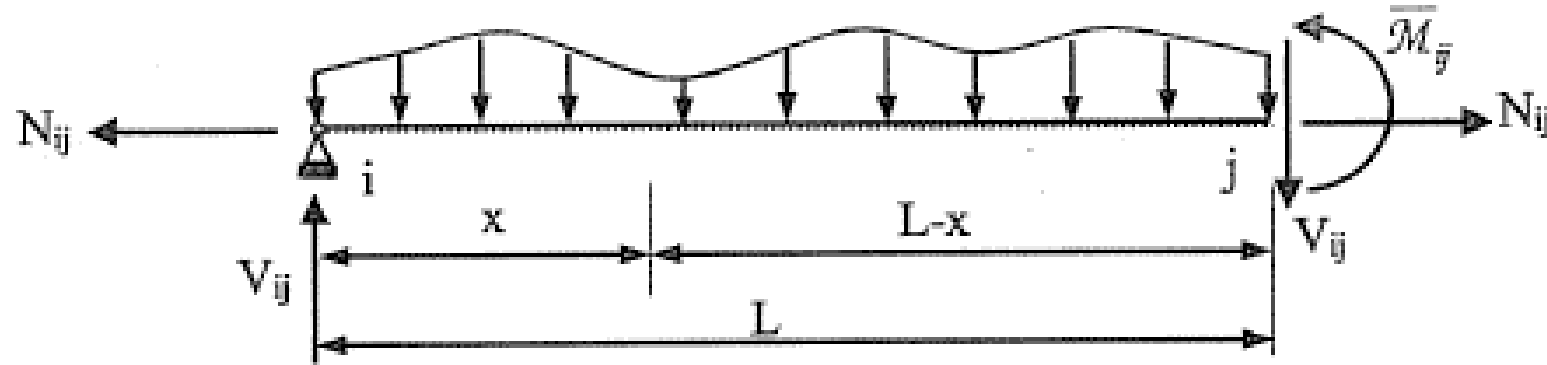
veya 2.5.3.d eşitliği göz önüne alınarak

$$\overline{M}_y = L/2 \quad (2.5.4b)$$

yazılır. Değişik yükler için ankastrelik uç momentleri Çizelge 2.4.1'de verilmiştir.

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.2.3 Sol ucu mafsallı sağ ucu ankastre çubuk



Sekil 2.5.5

Şekil 2.5.5’de görüldüğü gibi sol ucu mafsallı sağ ucu rijit düğüm noktası olan bir çubukta ankastrelik uç momenti genel olarak (2.4.24) eşitliğinden

$$\overline{M}_j = -\frac{3}{L^2} \int_0^L M_{0x} x dx \quad (2.5.4.c)$$

veya (2.5.3c) eşitliği göz önüne alınarak

$$\overline{M}_j = -\mathcal{R} / 2 \quad (2.5.4d)$$

biçiminde yazılır. Değişik yükler için ankastrelik uç momentleri Çizelge 2.4.1’de verilmiştir

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.3. Birim Yer Değiştirme Sabitleri

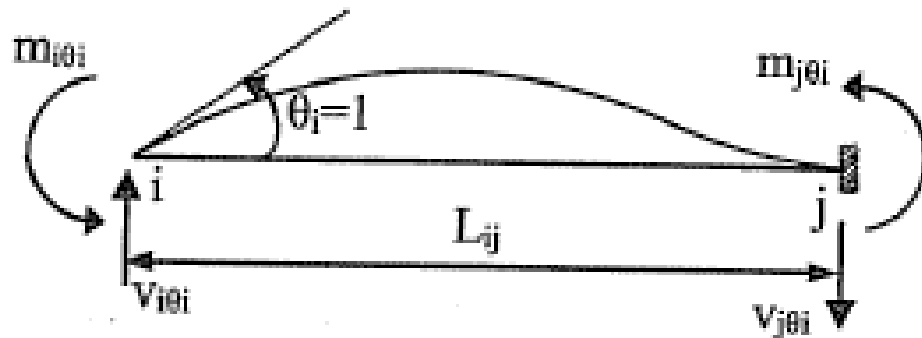
Uç yer değiştirmelerinden birinin bir birim değerlerinin sıfır olması durumunda meydana gelen uç kuvvetlere değeri bir birim olan uç yer değiştirmesi ilgili **birim yer değiştirme sabiti** denir.

2.5.3.1 İki ucu rijit düğüm noktası olan çubuklar

2.5.3.1.1 Birim yer değiştirme sabitlerinin tanımı

1) $\theta_i = 1$, $\theta_j = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ olması durumu

Şekil 2.5.6'da i ucundaki dönme açısı 1 ve diğer yer değiştirmeleri sıfır olan çubuk gösterilmiştir. Bu durumda çubuk uçlarında meydana gelen uç kuvvetleri aşağıda tanımlanmıştır.



Şekil 2.5.6

$$V_{i0i} = V_{j0i} = \frac{m_{i0i} + m_{j0i}}{L_{ij}}$$

2. Hiperstatik Sistemler

$m_{i\theta i}$: $\theta_i = 1$, $\theta_j = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun i ucunda meydana gelen uç momentidir. Bu durumda i ucundaki dönme açısı θ_i iken i ucundaki çubuk uç momenti şu şekilde yazılır.

$$M_{ij} = m_{i\theta i} \theta_i \quad (2.5.5a)$$

$m_{j\theta i}$: $\theta_i = 1$, $\theta_j = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun j ucunda meydana gelen uç momentidir. Bu durumda i ucundaki dönme açısı θ_i iken j ucundaki çubuk uç momenti şu şekilde yazılır.

$$M_{ji} = m_{j\theta i} \theta_i \quad (2.5.5b)$$

$v_{i\theta i}$: $\theta_i = 1$, $\theta_j = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun i ucunda meydana gelen çubuk eksenine dik uç kuvvetidir. Bu durumda i ucundaki dönme açısı θ_i iken i ucundaki çubuk eksenine dik çubuk uç kuvveti

$$V_{ij} = v_{i\theta i} \theta_i \quad (2.5.5c)$$

olur.

2. Hiperstatik Sistemler

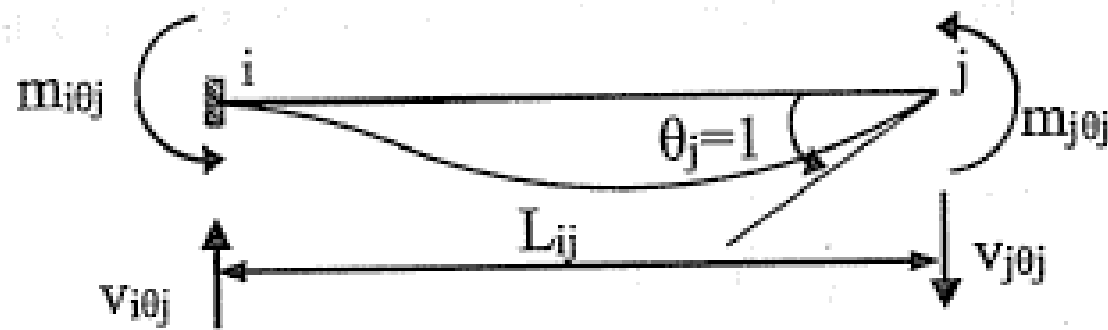
$v_{j\theta_i}$: $\theta_i = 1$, $\theta_j = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun j ucunda meydana gelen çubuk eksenine dik uç kuvvetidir. Bu durumda i ucundaki dönme açısı θ_i iken j ucundaki çubuk eksenine dik çubuk uç kuvveti

$$V_{ji} = v_{j\theta_i} \theta_i \quad (2.5.5d)$$

olur.

2) $\theta_j = 1$, $\theta_i = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ olması durumu

Şekil 2.5.7'de j ucundaki dönme açısı 1 ve diğer yer değiştirmeleri sıfır olan çubuk gösterilmiştir. Bu durumda çubuk uçlarında meydana gelen uç kuvvetleri aşağıda tanımlanmıştır.



$$v_{i\theta_j} = v_{j\theta_j} = \frac{m_{i\theta_j} + m_{j\theta_j}}{L_{ij}}$$

Şekil 2.5.7

2. Hiperstatik Sistemler

$m_{i\theta j}$: $\theta_j = 1$, $\theta_i = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun i uçunda meydana gelen uç momentidir. Bu durumda j ucundaki dönme açısı θ_j iken i ucundaki çubuk uç momenti

$$M_{ij} = m_{i\theta j} \theta_j \quad (2.5.6a)$$

olur.

$m_{j\theta j}$: $\theta_j = 1$, $\theta_i = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun j uçunda meydana gelen uç momentidir. Bu durumda j ucundaki dönme açısı θ_j iken j ucundaki çubuk uç momenti

$$M_{ji} = m_{j\theta j} \theta_j \quad (2.5.6b)$$

olur.

$v_{i\theta j}$: $\theta_j = 1$, $\theta_i = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun i uçunda meydana gelen çubuk eksenine dik uç kuvvetidir. Bu durumda j ucundaki dönme açısı θ_j iken i ucundaki çubuk eksenine dik çubuk uç kuvveti

$$V_{ij} = v_{i\theta j} \theta_j \quad (2.5.6c)$$

2. Hiperstatik Sistemler

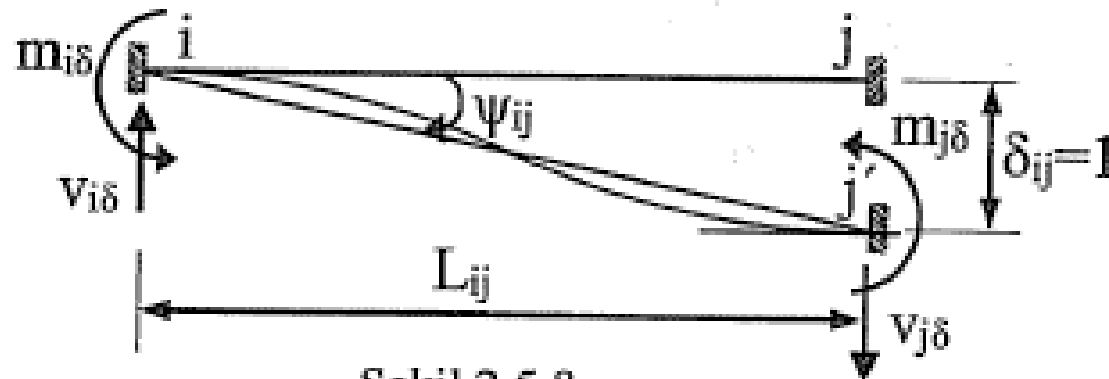
$v_{j\theta_j}$: $\theta_j = 1$, $\theta_i = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun j ucunda meydana gelen çubuk eksenine dik uç kuvvetidir. Bu durumda j ucundaki dönme açısı θ_j iken j ucundaki çubuk eksenine dik çubuk uç kuvveti

$$V_{ji} = v_{j\theta_j} \theta_j \quad (2.5.6d)$$

olur.

3) $\delta_{ij} = 1$, $\psi_{ij} = \frac{1}{L_{ij}}$, $\theta_i = \theta_j = \Delta_{ij} = 0$ olması durumu

Şekil 2.5.8'de i ucunun j ucuna göre çubuk eksenine dik yer değiştirmesi 1 veya ij çubuğunun elastik eğri kirişi dönme açısı $1/L_{ij}$ ve diğer yer değiştirmeleri sıfır olan çubuk gösterilmiştir. Bu durumda çubuk uçlarında meydana gelen uç kuvvetleri aşağıda tanımlanmıştır.



Şekil 2.5.8

$$V_{i\delta} = V_{j\delta} = \frac{m_{i\delta} + m_{j\delta}}{L_{ij}}$$

2. Hiperstatik Sistemler

$m_{i\delta}$: $\delta_{ij} = 1$, $\psi_{ij} = 1/L_{ij}$, $\theta_i = \theta_j = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun i ucunda meydana gelen uç momentidir. Bu durumda ij çubuğunda iki uç arasındaki rölatif yer değiştirme δ_{ij} iken i ucundaki çubuk uç momenti

$$M_{ij} = m_{i\delta} \delta_{ij} \quad (2.5.7a)$$

$m_{j\delta}$: $\delta_{ij} = 1$, $\psi_{ij} = 1/L_{ij}$, $\theta_i = \theta_j = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun j ucunda meydana gelen uç momentidir. Bu durumda ij çubuğunda iki uç arasındaki rölatif yer değiştirme δ_{ij} iken j ucundaki çubuk uç momenti

$$M_{ji} = m_{j\delta} \delta_{ij} \quad (2.5.7b)$$

$v_{i\delta}$: $\delta_{ij} = 1$, $\psi_{ij} = 1/L_{ij}$, $\theta_i = \theta_j = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun i ucunda meydana gelen çubuk eksenine dik uç kuvvetidir. Bu durumda ij çubuğunda iki uç arasındaki rölatif yer değiştirme δ_{ij} iken i ucundaki çubuk eksenine dik uç kuvveti

$$V_{ij} = v_{i\delta} \delta_{ij} \quad (2.5.7c)$$

2. Hiperstatik Sistemler

$v_{j\delta}$: $\delta_{ij} = 1$, $\psi_{ij} = 1/L_{ij}$, $\theta_i = \theta_j = \Delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun j ucunda meydana çubuk eksenine dik uç kuvvetidir. Bu durumda ij çubuğunda iki uç arasındaki rölatif yer değiştirme δ_{ij} iken j ucundaki çubuk eksenine dik uç kuvveti

$$V_{ji} = v_{j\delta} \delta_{ij} \quad (2.5.7d)$$

biçiminde yazılır.

Betti karşılıklı teoremi uyarınca

$$m_{i\theta j} = m_{j\theta i}, \quad v_{j\theta i} = m_{i\delta}, \quad v_{j\theta j} = m_{j\delta}$$

yazılır. Her durum için çubuk uçlarında moment denge denklemleri yazılarak

$$v_{i\theta i} = v_{j\theta i} = \frac{m_{i\theta i} + m_{j\theta i}}{L_{ij}} \quad (2.5.8a)$$

$$v_{i\theta j} = v_{j\theta j} = \frac{m_{i\theta j} + m_{j\theta j}}{L_{ij}} \quad (2.5.8b)$$

$$v_{i\delta} = v_{j\delta} = \frac{m_{i\delta} + m_{j\delta}}{L_{ij}} \quad (2.5.8c)$$

2. Hiperstatik Sistemler

$m_{i\delta}$ ve $m_{j\delta}$ 'yi $v_{j\theta i} = m_{i\delta}$ ve $v_{j\theta j} = m_{j\delta}$ eşitliklerinden

$$m_{i\delta} = v_{j\theta i} = \frac{m_{i\theta i} + m_{j\theta i}}{L_{ij}} \quad (2.5.8d)$$

$$m_{j\delta} = v_{j\theta j} = \frac{m_{i\theta j} + m_{j\theta j}}{L_{ij}} \quad (2.5.8e)$$

ve bunların değerleri de yerlerine konularak

$$v_{i\delta} = v_{j\delta} = \frac{m_{i\theta i} + 2m_{i\theta j} + m_{j\theta j}}{L_{ij}^2} \quad (2.5.8f)$$

elde edilir.

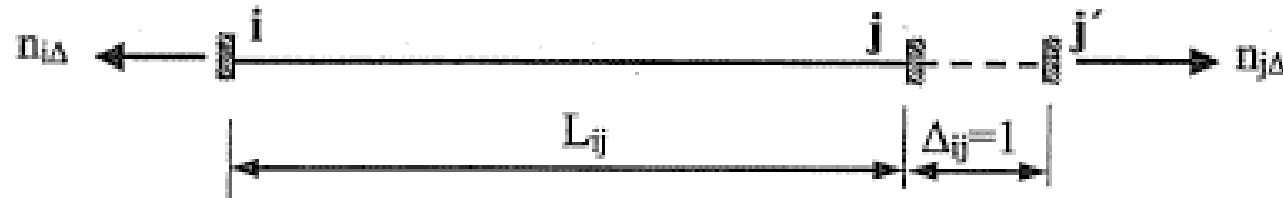
Sonuç olarak,

$$\theta_j = 1, \theta_i = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0 \text{ ve } \theta_j = 1, \theta_i = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$$

ile ilgili uç momentleri belirlenirse diğer birim yer değiştirme sabitler bunlara bağlı olarak (2.5.8) eşitliklerinden hesaplanabilir.

2. Hiperstatik Sistemler

4) $\Delta_{ij} = 1$, $\psi_{ij} = \theta_i = \theta_j = \delta_{ij} = 0$ olması durumu



Şekil 2.5.9

$n_{i\Delta}$: $\Delta_{ij} = 1$, $\psi_{ij} = \theta_i = \theta_j = \delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun i ucunda meydana gelen çubuk eksenine paralel uç kuvvet. Bu durumda ij çubuğunda iki uç arasındaki çubuk eksenine paralel rölatif yer değiştirme Δ_{ij} iken i ucundaki çubuk eksenine paralel uç kuvveti şu şekilde yazılır.

$$N_{ij} = n_{i\Delta} \Delta_{ij} \quad (2.5.9a)$$

$n_{j\Delta}$: $\Delta_{ij} = 1$, $\psi_{ij} = \theta_i = \theta_j = \delta_{ij} = 0$ iken ij çubuğunun j ucunda meydana gelen çubuk eksenine paralel uç kuvvet. Bu durumda ij çubuğunda iki uç arasındaki çubuk eksenine paralel rölatif yer değiştirme Δ_{ij} iken j ucundaki çubuk eksenine paralel uç kuvveti

$$N_{ji} = n_{j\Delta} \Delta_{ij} \quad (2.5.9b)$$

olur. Betti karşılıklı teoremi gereğince $n_{i\Delta} = n_{j\Delta}$ 'dır.

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.3.1.2 Uç momentleri ve uç kuvvetleri

Açı yöntemi anlatılırken açılara ve ankastrelik uç momentlerine bağlı olarak yazılan uç momentleri burada açıklanan birim yer değiştirme sabitlerine ve ankastrelik uç kuvvetlerine bağlı olarak

$$M_{ij} = m_{i\theta i} \theta_i + m_{i\theta j} \theta_j + m_{i\delta} \delta_{ij} + \mathcal{M}_{ij} \quad (2.5.10a)$$

$$M_{ji} = m_{j\theta i} \theta_i + m_{j\theta j} \theta_j + m_{j\delta} \delta_{ij} + \mathcal{M}_{ji} \quad (2.5.10b)$$

$$V_{ij} = v_{i\theta i} \theta_i + v_{i\theta j} \theta_j + v_{i\delta} \delta_{ij} + \mathcal{V}_{ij} \quad (2.5.10c)$$

$$V_{ji} = v_{j\theta i} \theta_i + v_{j\theta j} \theta_j + v_{j\delta} \delta_{ij} + \mathcal{V}_{ji} \quad (2.5.10d)$$

ve çubuk eksenine paralel uç kuvvetleri de

$$N_{ij} = n_{i\Delta} \Delta_{ij} + \mathcal{N}_{ij} \quad (2.5.10e)$$

$$N_{ji} = n_{j\Delta} \Delta_{ij} + \mathcal{N}_{ji} \quad (2.5.10f)$$

şeklinde yazılır.

2. Hiperstatik Sistemler

Uç kuvvetleri, birim yer değiştirme sabitleri ve ankastrelik uç kuvvetleri arasındaki eşitlikler matris biçiminde

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \\ V_{ij} \\ V_{ji} \\ N_{ij} \\ N_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{i\theta i} & m_{i\theta j} & m_{i\delta} & 0 \\ m_{j\theta i} & m_{j\theta j} & m_{j\delta} & 0 \\ v_{i\theta i} & v_{i\theta j} & v_{i\delta} & 0 \\ v_{j\theta i} & v_{j\theta j} & v_{j\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{i\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & n_{j\Delta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \delta_{ij} \\ \Delta_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{ij} \\ \mathcal{M}_{ji} \\ \mathcal{V}_{ij} \\ \mathcal{V}_{ji} \\ \mathcal{N}_{ij} \\ \mathcal{N}_{ji} \end{bmatrix} \quad (2.5.11)$$

şeklinde yazılabilir.



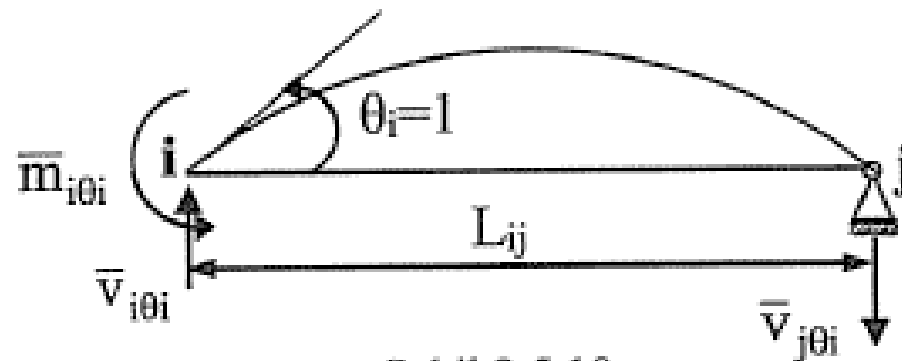
2. Hiperstatik Sistemler

2.5.3.2 Sol ucu rijit düğüm noktası sağ ucu mafsallı çubuk

2.5.3.2.1 Birim yer değiştirme sabitleri

1) $\theta_i = 1$, $\delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = M_{ji} = 0$ olması durumu

Şekil 2.5.10'da i ucundaki dönme açısı 1 ve bu uçta diğer yer değiştirmeleri sıfır ve j ucunda uç momenti sıfır olan çubuk gösterilmiştir. İki ucu ankastre çubuktaki değerlerden ayırt etmek için bu durumdaki değerler üzeri çizgili olarak gösterilmiştir.



Şekil 2.5.10

Çubukta moment denge şartından

$$\bar{v}_{i0i} = \bar{v}_{j0i} = \frac{\bar{m}_{i0i}}{L_{ij}} \quad (2.5.12a)$$

ve birim yer değiştirme tanımından

$$\bar{M}_{ij} = \bar{m}_{i0i} \theta_i \quad (2.5.12b)$$

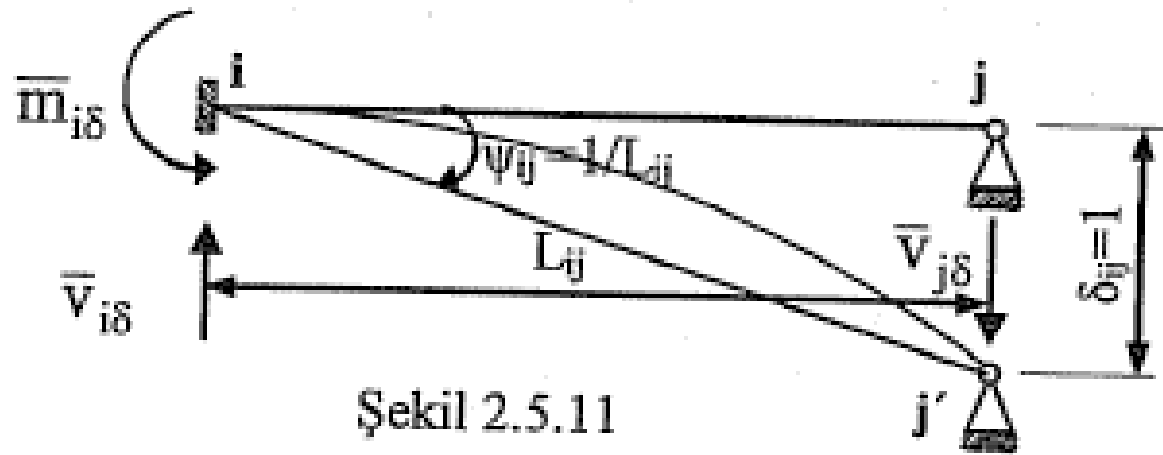
$$\bar{V}_{ij} = \bar{V}_{ji} = \bar{v}_{i0i} \theta_i \quad (2.5.12c)$$

yazılır.

2. Hiperstatik Sistemler

2) $\delta_{ij} = 1$, $\psi_{ij} = \frac{1}{L_{ij}}$, $\theta_i = \Delta_{ij} = M_{ji} = 0$ olması durumu

Şekil 2.5.11'de ij çubuğunun i ucunun j ucuna göre çubuk eksenine dik rölatif yer değiştirmesi 1 diğer yer değiştirmeleri sıfır ve j ucunda uç momenti sıfır olan çubuk gösterilmiştir. İki ucu ankastre çubuktaki değerlerden ayırt etmek için bu durumdaki değerler üzeri çizgili olarak gösterilmiştir.



2. Hiperstatik Sistemler

Çubukta moment denge şartlarından

$$\bar{v}_{i\delta} = \bar{v}_{j\delta} = \frac{\bar{m}_{i\delta}}{L_{ij}} \quad (2.5.13a)$$

ve birim yer değiştirme tanımından

$$\bar{M}_{ij} = \bar{m}_{i\delta} \delta_{ij}, \quad (2.5.13b)$$

ve

$$\bar{V}_{ij} = \bar{V}_{ji} = \bar{v}_{i\delta} \delta_{ij} \quad (2.5.13c)$$

ve Betti karşılıklı teoreminden

$$\bar{m}_{i\delta} = \bar{v}_{j\theta i} = \frac{\bar{m}_{i\theta i}}{L_{ij}} \quad (2.5.14a)$$

ve

$$\bar{v}_{i\delta} = \bar{v}_{j\delta} = \frac{\bar{m}_{i\theta i}}{L_{ij}^2} \quad (2.5.14b)$$

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.3.2.2 Uç momentleri ve kuvvetleri

Açı yöntemi anlatılırken açılara ve ankastrelik uç momentlerine bağlı olarak yazılan uç kuvvetleri burada açıklanan birim yer değiştirme sabitlerine ve ankastrelik uç kuvvetlerine bağlı olarak

$$\overline{M}_{ij} = \overline{m}_{i\theta i} \theta_i + \overline{m}_{i\delta} \delta_{ij} + \overline{\mathcal{M}}_{ij} \quad (2.5.15a)$$

$$\overline{V}_{ij} = \overline{v}_{i\theta i} \theta_i + \overline{v}_{i\delta} \delta_{ij} + \mathcal{V}_{ij} \quad (2.5.15b)$$

$$\overline{V}_{ji} = \overline{v}_{j\theta i} \theta_i + \overline{v}_{j\delta} \delta_{ij} + \mathcal{V}_{ji} \quad (2.5.15c)$$

şeklinde de yazılır.

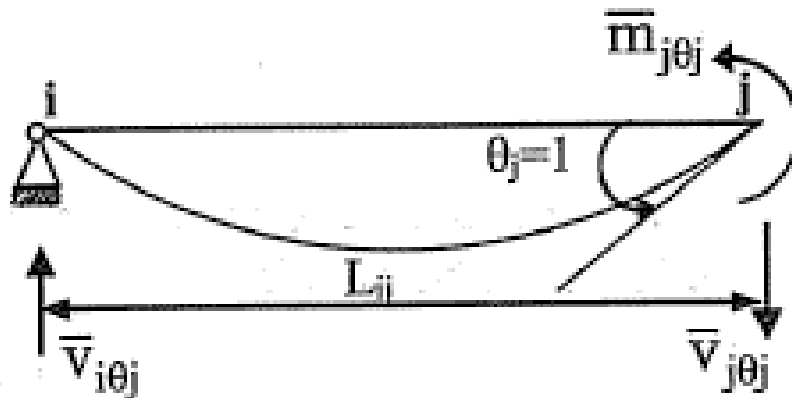


2. Hiperstatik Sistemler

2.5.3.3 Sağ ucu rijit düğüm noktası sol ucu mafsallı çubuk

2.5.3.3.1 Birim yer değiştirme sabitleri

1) $\theta_j = 1$, $\delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = M_{ij} = 0$ olması durumu



Şekil 2.5.12

Şekil 2.5.12’de j ucundaki dönme açısı 1 ve bu uçta diğer yer değiştirmeleri sıfır ve i ucunda uç momenti sıfır olan çubuk gösterilmiştir. İki ucu ankastre çubuktaki değerlerden ayırt etmek için bu durumdaki değerler üzeri çizgili olarak gösterilmiştir.

Çubuk üzerinde moment denge şartından

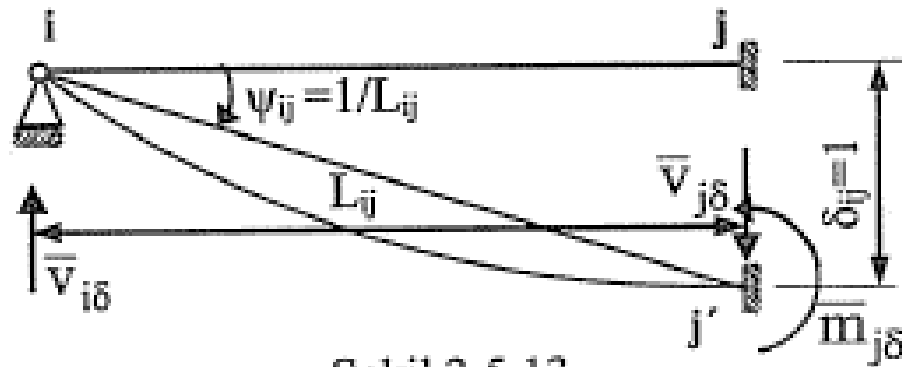
$$\bar{V}_{ij} = \bar{V}_{ji} = \frac{\bar{m}_{j\theta_j}}{L_{ij}} \quad (2.5.16a)$$

ve birim yer değiştirme tanımından

$$\bar{M}_{ji} = \bar{m}_{j\theta_j} \theta_j, \quad \bar{V}_{ij} = \bar{V}_{ji} = \bar{V}_{j\theta_j} \theta_j \quad (2.5.16b,c)$$

2. Hiperstatik Sistemler

2) $\delta_{ij} = 1$, $\psi_{ij} = \frac{1}{L_{ij}}$, $\theta_j = \Delta_{ij} = M_{ij} = 0$ olması durumu



Şekil 2.5.13

Şekil 2.5.13'de ij çubuğunun i ucunun j ucuna göre çubuk eksenine dik rölatif yer değiştirmesi 1, diğer yer değiştirmeleri sıfır ve i ucunda uç momenti sıfır olan çubuk gösterilmiştir. İki ucu ankastre çubuktaki değerlerden ayırt etmek için

bu durumdaki değerler üzeri çizgili olarak gösterilmiştir.

Çubukta moment denge şartından

$$\bar{V}_{i\delta} = \bar{V}_{j\delta} = \frac{\bar{m}_{j\delta}}{L_{ij}} \quad (2.5.17a)$$

ve birim yer değiştirme tanımından

$$\bar{M}_{ji} = \bar{m}_{j\delta} \delta_{ij}, \quad \bar{V}_{ij} = \bar{V}_{ji} = \bar{V}_{j\delta} \delta_{ij} \quad (2.5.17b,c)$$

2. Hiperstatik Sistemler

ve Betti karşılık teoreminden

$$\overline{m}_{j\delta} = \overline{v}_{j\theta_j} = \frac{\overline{m}_{j\theta_j}}{L_{ij}} \quad \text{ve} \quad \overline{v}_{i\delta} = \overline{v}_{j\delta} = \frac{\overline{m}_{j\theta_j}}{L_{ij}^2} \quad (2.5.18a,b)$$

yazılır. Bu değerler yerine konularak çubuk uç kuvvetleri hesaplanır.

2.5.3.3.2 Uç Momentleri ve kuvvetleri

Uç momentleri ve uç kuvvetleri çubuk ucunda oluşacak açılara, birim yer değiştirme sabitlerine ve ankastrelik uç momentlerine bağlı olarak

$$\overline{M}_{ji} = \overline{m}_{j\theta_j} \theta_j + \overline{m}_{j\delta} \delta_{ij} + \overline{\mathcal{M}}_{ji} \quad (2.5.19a)$$

$$\overline{V}_{ij} = \overline{v}_{i\theta_j} \theta_j + \overline{v}_{i\delta} \delta_{ij} + \overline{\mathcal{V}}_{ij} \quad (2.5.19b)$$

$$\overline{V}_{ji} = \overline{v}_{j\theta_j} \theta_j + \overline{v}_{j\delta} \delta_{ij} + \overline{\mathcal{V}}_{ji} \quad (2.5.19c)$$

biçiminde yazılır.

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.3.4 Birim Yer Değiştirme Sabitlerinin Hesabı

2.5.3.4.1 İki ucu rijit düğüm noktası olan çubuk

Açı yönteminde sabit atalet momentli sistemler için virtüel iş denklemi yardımı ile yazdığımız (2.4.9a) ve (2.4.9b) eşitlikleri tekrar göz önüne alalım.

$$M_{ij} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_i + \theta_j + 3\psi_{ij}) + \mathcal{M}_{ij} \quad (2.5.20a)$$

$$M_{ji} = 2E \frac{I}{L} (\theta_i + 2\theta_j + 3\psi_{ij}) + \mathcal{M}_{ji} \quad (2.5.20b)$$

Bu eşitliklerde:

1) $\theta_i = 1$, $\theta_j = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ ve ankastrelik uç momentleri de sıfır konulursa

$$M_{ij} = m_{i\theta i} \text{ ve } M_{ji} = m_{j\theta i}$$

2. Hiperstatik Sistemler

Değerler yerlerine konularak

$$m_{i\theta i} = \frac{2EI}{L} (2 \times 1 + 0 + 0) + 0$$

$$m_{i\theta i} = \frac{4EI}{L} \quad (2.5.21a)$$

elde edilir. $I/L = k$ değerine **rijitlik faktörü** denir. I/L yerine bu değer konularak

$m_{i\theta i} = 4Ek$

(2.5.21b)

yazılır.

$$m_{j\theta i} = \frac{2EI}{L} (1 \times 1 + 0 + 0) + 0$$

$$m_{j\theta i} = 2EI / L \quad (2.5.21c)$$

veya

$m_{j\theta i} = 2Ek$

(2.5.21d)

2. Hiperstatik Sistemler

$m_{i\theta i}$ ve $m_{j\theta i}$ 'nin yukarıda hesaplanan değerleri (2.5.8a) da yerine konursa

$$V_{i\theta i} = V_{j\theta i} = \frac{4EI/L + 2EI/L}{L}$$

$$V_{i\theta i} = V_{j\theta i} = \frac{6EI}{L^2} \quad (2.5.21e)$$

veya $I/L = k$ yazılırsa

$$V_{i\theta i} = V_{j\theta i} = \frac{6Ek}{L} \quad (2.5.21f)$$

elde edilir.

2) $\theta_j = 1$, $\theta_i = \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = 0$ konulursa $M_{ij} = m_{i\theta j}$ ve $M_{ji} = m_{j\theta j}$ ve ankastrelik uç momenti de sıfır olacaktır. Bu değerler yerine konulursa benzer şekilde

$$m_{i\theta j} = 2EI/L \quad \text{veya} \quad m_{i\theta j} = 2Ek \quad (2.5.22a,b)$$

$$m_{j\theta j} = 4EI/L \quad \text{veya} \quad m_{j\theta j} = 4Ek \quad (2.5.22c,d)$$

2. Hiperstatik Sistemler

$m_{i\theta_j}$ ve $m_{j\theta_j}$ 'lerin bu değerleri (2.5.8b) eşitliğinde yerine konulursa

$$v_{i\theta_j} = v_{j\theta_j} = \frac{2EI/L + 4EI/L}{L}$$

$$v_{i\theta_j} = v_{j\theta_j} = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{veya} \quad v_{i\theta_j} = v_{j\theta_j} = \frac{6Ek}{L} \quad (2.5.22e)$$

yazılır.

3) $\delta_{ij} = 1, \psi_{ij} = 1/L, \theta_i = \theta_j = \delta\Delta_{ij} = 0$ ve ankastrelik uç momentleri sıfır konulursa

$M_{ij} = m_{i\delta}$ ve $M_{ji} = m_{j\delta}$ olacaktır. Bu değerler yerine konulursa

$$m_{i\delta} = \frac{2EI}{L} \left(0 + 0 + 3 \frac{1}{L} \right)$$

$$m_{i\delta} = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{veya} \quad m_{i\delta} = \frac{6Ek}{L} \quad (2.5.23a,b)$$

2. Hiperstatik Sistemler

$$m_{j\delta} = \frac{2EI}{L} \left(0 + 0 + 3 \frac{1}{L} \right)$$

$$m_{j\delta} = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{veya} \quad m_{j\delta} = \frac{6Ek}{L} \quad (2.5.23c,d)$$

yazılır ve (2.5.8c) eşitliğinde $m_{i\delta}$ ve $m_{j\delta}$ değerleri yerlerine konulursa

$$v_{i\delta} = v_{j\delta} = \frac{\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2}}{L}$$

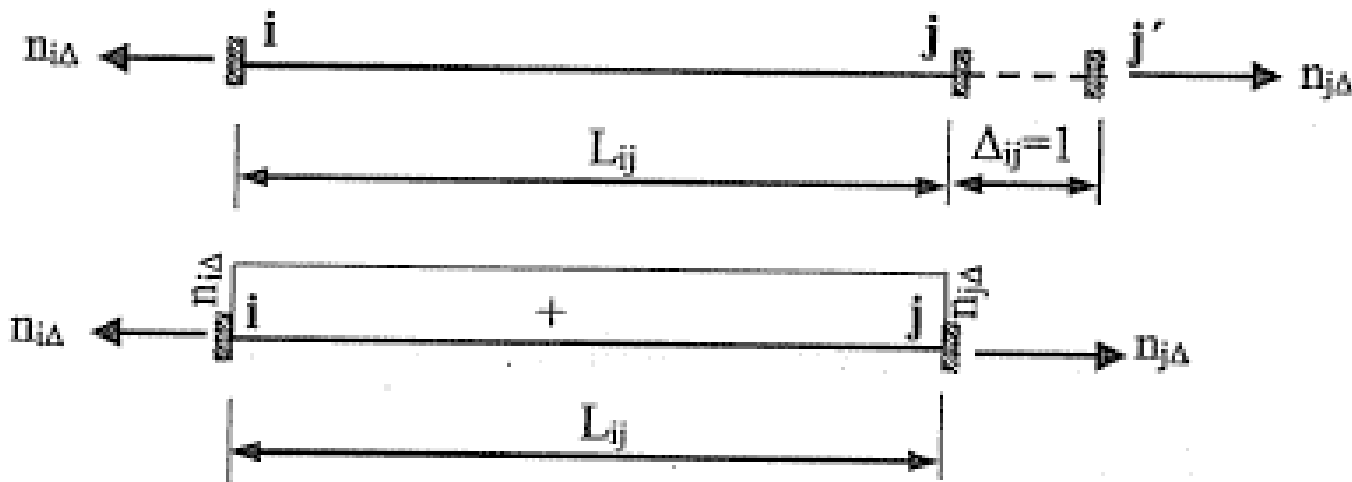
$$v_{i\delta} = v_{j\delta} = \frac{12EI}{L^3} \quad \text{veya} \quad v_{i\delta} = v_{j\delta} = \frac{12Ek}{L^2} \quad (2.5.23e,f)$$

elde edilir.

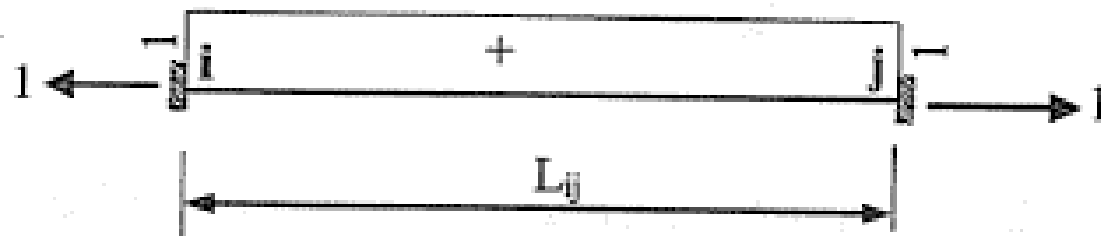


2. Hiperstatik Sistemler

4) $\Delta_{ij} = 1, \psi_{ij} = \theta_i = \theta_j = \delta_{ij} = 0$ durumunda $N_{ij} = N_{ji} = n_{i\Delta} = n_{j\Delta}$ olacaktır. Normal kuvvet etkisinde gene virtüel iş denklemi kullanılırsa



Şekil 2.5.14 uçlarında $n_{i\Delta} = n_{j\Delta}$ normal kuvveti bulunan çubukta normal kuvvet diyagramı



Şekil 2.5.15 virtüel birim yükleme ve birim yükleme ile ilgili normal kuvvet diyagramı

2. Hiperstatik Sistemler

$$\Delta_{ij} = \int_0^L n_{i\Delta} \frac{dx}{EA} = \frac{n_{i\Delta}}{EA} L = 1 \text{ den}$$

$$n_{i\Delta} = \frac{EA}{L} \text{ ve } n_{j\Delta} = n_{i\Delta} = \frac{EA}{L} \quad (2.5.24a,b)$$

elde edilir.

Özet olarak bir çubukta atalet momentinin sabit olması durumunda birim yer değiştirme sabitleri

$$m_{i\theta i} = m_{j\theta j} = 4EI/L \text{ veya } m_{i\theta i} = m_{j\theta j} = 4Ek \quad (2.5.25a,b)$$

$$m_{j\theta i} = m_{i\theta j} = 2EI/L \text{ veya } m_{j\theta i} = m_{i\theta j} = 2Ek \quad (2.5.25c,d)$$

$$v_{i\theta i} = v_{j\theta i} = v_{i\theta j} = v_{j\theta j} = \frac{6EI}{L^2}$$

2. Hiperstatik Sistemler

$$\text{veya } v_{i\theta i} = v_{j\theta i} = v_{i\theta j} = v_{j\theta j} = \frac{6Ek}{L} \quad (2.5.25e,f)$$

$$m_{i\delta} = m_{j\delta} = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{veya} \quad m_{i\delta} = m_{j\delta} = \frac{6Ek}{L} \quad (2.5.25g,h)$$

$$v_{i\delta} = v_{j\delta} = \frac{12EI}{L^3} \quad \text{veya} \quad v_{i\delta} = v_{j\delta} = \frac{12Ek}{L^2} \quad (2.5.25i,i)$$

$$n_{j\Delta} = n_{i\Delta} = \frac{EA}{L} \quad (2.5.25k)$$

elde edilir.

Sabit atalet momentli çubuklar için uç kuvvetleri

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L} \theta_i + \frac{2EI}{L} \theta_j + \frac{6EI}{L^2} \delta_{ij} + \mathcal{M}_{ij}$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} \theta_i + \frac{4EI}{L} \theta_j + \frac{6EI}{L^2} \delta_{ij} + \mathcal{M}_{ji}$$

$$V_{ij} = \frac{6EI}{L^2} \theta_i + \frac{6EI}{L^2} \theta_j + \frac{12EI}{L^3} \delta_{ij} + \mathcal{V}_{ij}$$

2. Hiperstatik Sistemler

$$V_{ji} = \frac{6EI}{L^2} \theta_i + \frac{6EI}{L^2} \theta_j + \frac{12EI}{L^3} \delta_{ij} + \mathcal{V}_{ji}$$

$$N_{ij} = \frac{AE}{L} \Delta_{ij} + \mathcal{N}_{ij}$$

$$N_{ji} = \frac{AE}{L} \Delta_{ij} + \mathcal{N}_{ji}$$

(2.5.26a)

veya matris biçiminde

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \\ V_{ij} \\ V_{ji} \\ N_{ij} \\ N_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{6EI} & \frac{L^2}{12EI} & 0 \\ \frac{L^2}{6EI} & \frac{L^2}{6EI} & \frac{L^3}{12EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \delta_{ij} \\ \Delta_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{ij} \\ \mathcal{M}_{ji} \\ \mathcal{V}_{ij} \\ \mathcal{V}_{ji} \\ \mathcal{N}_{ij} \\ \mathcal{N}_{ji} \end{bmatrix}$$

(2.5.26b)

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.3.4.2 Sol ucu rijit sağ ucu mafsallı çubuk

Açı yöntemindeki

$$\overline{M}_{ij} = 3E \frac{I}{L} (\theta_i + \psi_{ij}) + \overline{M}_f \quad (2.5.27)$$

eşitliğinde:

1) $\theta_i = 1, \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = M_{ji} = 0$ durumunda dış yük olmadığından ankastrelik uç momenti sıfır ve $\overline{M}_{ij} = \overline{m}_{i\theta i}$ olacaktır. Buradan

$$\overline{m}_{i\theta i} = 3EI / L \quad (2.5.28a)$$

veya

$$\overline{m}_{i\theta i} = 3Ek \quad (2.5.28b)$$

$$\overline{v}_{i\theta i} = \overline{v}_{j\theta i} = 3EI / L^2 \quad (2.5.28c)$$

2. Hiperstatik Sistemler

veya

$$\bar{v}_{i0i} = \bar{v}_{j0i} = 3Ek / L \quad (2.5.28d)$$

2) $\delta_{ij} = 1, \psi_{ij} = 1/L, \theta_i = \Delta_{ij} = M_{ji} = 0$ durumunda dış yük olmadığından ankastrelik uç momenti sıfır ve $\bar{M}_{ij} = \bar{m}_{i\delta}$ olacaktır. Buradan

$$\bar{m}_{i\delta} = 3EI / L^2 \quad (2.5.28e)$$

veya

$$\bar{m}_{i\delta} = 3Ek / L \quad (2.5.28f)$$

$$\bar{v}_{i\delta} = \bar{v}_{j\delta} = 3EI / L^3 \quad (2.5.28g)$$

veya

$$\bar{v}_{i\delta} = \bar{v}_{j\delta} = 3Ek / L^2 \quad (2.5.28h)$$

yazılır.

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.3.4.3 Sol ucu mafsallı sağ ucu rijit çubuk

Açı yöntemindeki

$$\overline{M}_{ji} = 3E \frac{I}{L} (\theta_j + \psi_{ij}) + \overline{M}_j \quad (2.5.29)$$

eşitliğinde:

1) $\theta_j = 1, \delta_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} = M_{ij} = 0$ durumunda dış yük olmadığından ankastrelik uç momenti sıfır ve $\overline{M}_{ji} = \overline{m}_{j\delta}$ olacaktır. Buradan

$$\overline{m}_{j\theta j} = 3EI/L \quad \text{veya} \quad \overline{m}_{j\theta j} = 3Ek \quad (2.5.30a, b)$$

$$\overline{v}_{i\theta j} = \overline{v}_{j\theta j} = 3EI/L^2 \quad \text{veya} \quad \overline{v}_{i\theta j} = \overline{v}_{j\theta j} = 3Ek/L \quad (2.5.30c, d)$$

2) $\delta_{ij} = 1, \psi_{ij} = \frac{1}{L}, \theta_i = \Delta_{ij} = M_{ij} = 0$ durumunda dış yük olmadığından ankastrelik uç momenti sıfır ve $\overline{M}_{ji} = \overline{m}_{j\delta}$ olacaktır. Buradan

$$\overline{m}_{j\delta} = 3EI/L^2 \quad \text{veya} \quad \overline{m}_{j\delta} = 3Ek/L \quad (2.5.30e, f)$$

$$\overline{v}_{i\delta} = \overline{v}_{j\delta} = 3EI/L^3 \quad \text{veya} \quad \overline{v}_{i\delta} = \overline{v}_{j\delta} = 3Ek/L^2 \quad (2.5.30g, h)$$

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.4.Moment Dağıtım Yönteminin Esasları

Daha önce açıklanan yöntemlerin hepsinde üç veya dörtten fazla bilinmeyen olduğunda hesap işleminde zamanın büyük bir kısmı bu denklemlerin çözümü için harcanır. Moment dağıtım yöntemi genel olarak birçok benzer denklemin çözümünü içermez. Şimdi bu yöntemle nasıl kısa zamanda hesap yapılacağını açıklayalım. Yöntem esas itibariyle açıya dayalı olarak yazılan ve (2.4.9) veya (2.5.10) eşitlikleri ile üretilen denklemlerin bir birini takip eden ardışık yaklaşım yolu ile çözülmesine karşılık gelir. Bu yöntemde denklemler yazılmadan adım adım denge konumuna yaklaşılmaktadır. Birinci mertebe teorisinde, açıya dayalı denklemlerin katsayılar matrisi simetrik ve bütün minörlere ait determinantlar da pozitif olduğundan bu iterasyon işlemi yakınsaktır.



2. Hiperstatik Sistemler

Eğer açı yöntemindeki genel açı denklemleri olan (2.4.10a, 2.4.10b) eşitliklerini ve bu bölümdeki (2.5.20a, 2.5.20b, 2.5.27 ve 2.5.29) eşitlikleri

$$M_{ij} = 2Ek_{ij}(2\theta_i + \theta_j + 3\psi_{ij}) + \mathcal{M}_{ij}$$

$$M_{ji} = 2Ek_{ij}(\theta_i + 2\theta_j + 3\psi_{ij}) + \mathcal{M}_{ji}$$

veya bu bölümde birim yer değiştirme sabitlerine bağlı olarak yazılan (2.5.10a, b)

$$M_{ij} = m_{i\theta i}\theta_i + m_{i\theta j}\theta_j + m_{i\delta}\delta_{ij} + \mathcal{M}_{ij}$$

$$M_{ji} = m_{j\theta i}\theta_i + m_{j\theta j}\theta_j + m_{j\delta}\delta_{ij} + \mathcal{M}_{ji}$$

eşitliklerini ele alırsak bir çubuğun ucuna etkiyen momentlerin dört ayrı etkinin cebirsel toplamı olduğunu gözlemliyoruz.

2. Hiperstatik Sistemler

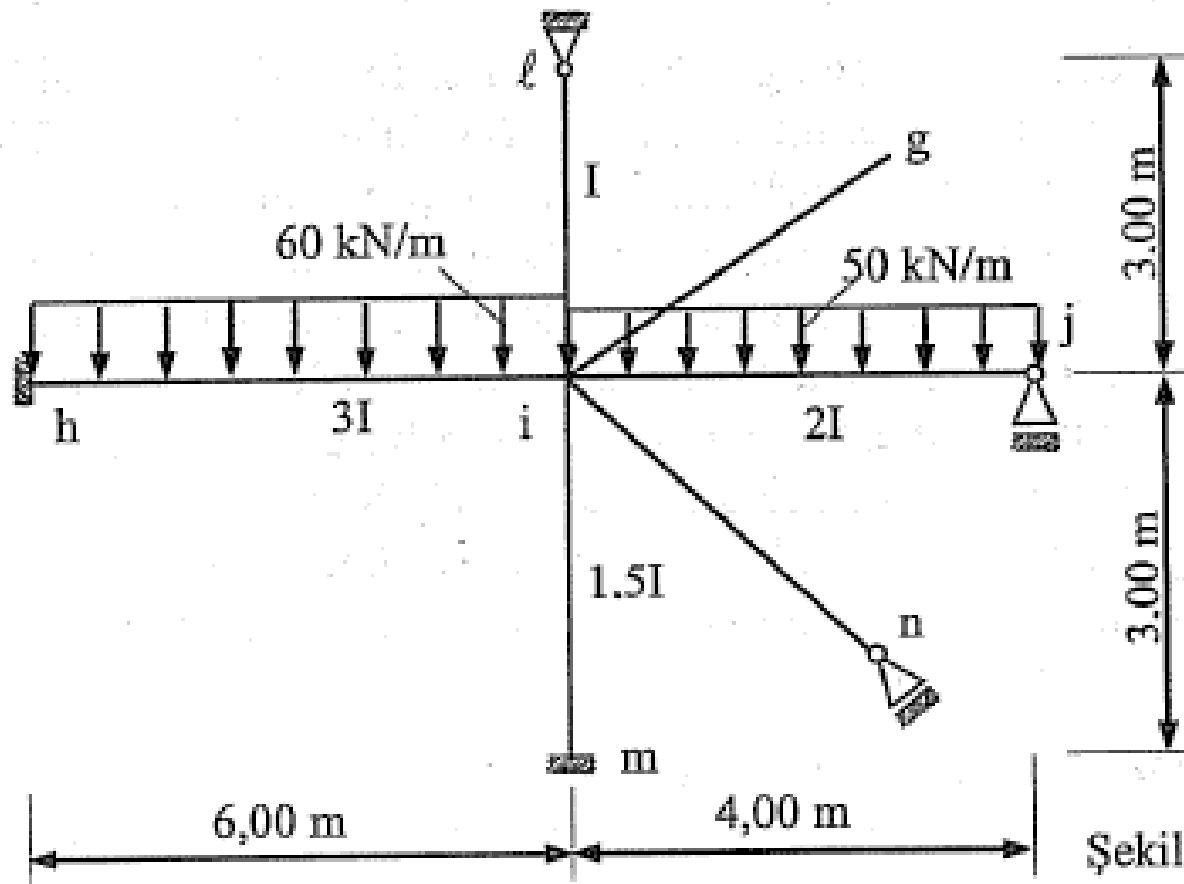
1. Çubuğa uygulanan dış yüklerden oluşan ankastrelik uç momentleri, M_{ij}, M_{ji}
2. Uç momentleri hesaplanan çubuk ucunda elastik eğrinin teğetinin dönmesinden meydana gelen uç momentleri, $M_{ij} = m_{i\theta i}\theta_i$
3. Elastik eğrinin teğetinin çubuğun diğer ucundaki dönmesinden meydana gelen uç momentleri, $M_{ij} = m_{i\theta j}\theta_j$
4. Elastik eğri kirişi ile çubuk eksenini arasındaki dönmeden (iki ucun bir birine göre çubuk eksenine dik rölatif yer değiştirmesinden) meydana gelen uç momentleri, $m_{i\delta}\delta_{ij}$ dir.

Toplam uç momentleri bu dört etkiden meydana gelen değerlerin cebirsel toplamı olduğundan bunların her birinden meydana gelen uç momentlerinin ayrı ayrı hesaplanabileceğini önermek mümkündür ve böylece eşzamanlı olarak etkiyen dört etkiden oluşan sonuç uç momentine ulaşılır.

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.4.1-Düğüm Noktaları Sabit Sistemler

Açıklamayı basitleştirmek için prizmatik çubuklardan oluşan bir sistemi ele alalım. Diğer bir anlatımla çubukların uzunlukları boyunca atalet momentleri sabit ve düğüm noktaları yer değiştirmeyen (sabit ve δ_{ij} rölatif yer değiştirmesi ve dolayısıyla ψ_{ij} açısı sıfır olan) bir sistemi inceleyelim.



Şekil 2.5.16

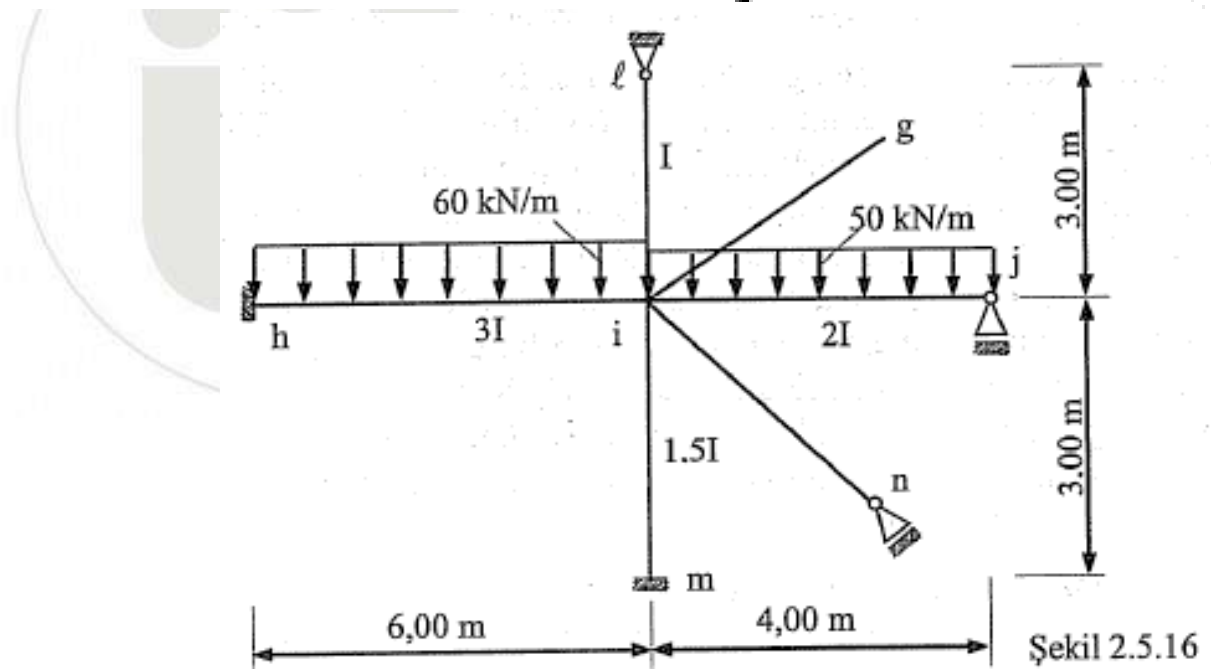
2. Hiperstatik Sistemler

Şekil 2.5.16'daki sistemi göz önüne alalım. Mesnetlerde tutulu doğrultularda hareket olmaz ise h ve m de dönme olmaz, j ve ℓ 'de dönme olur ancak bunların da ankastrelik uç kuvvetleri ve birim yer değiştirme sabitlerinin hesabında bu durum göz önüne alınırsa bunların dönme açılarını hesaplamaya gerek yoktur. **ig çubuğu** bir konsol kiriş olduğundan sadece kendi üzerinde etkiyen yükler nedeni ile uç moment alacaktır. Eğer üzerinde yük yoksa uç momenti de sıfır olacaktır. **in çubuğu** da n ucunda eksenine dik olarak hareket edebildiği için bu uçta çubuk eksenine dik doğrultuda mesnet tepkisi olmayacak ve dolayısıyla bu çubukta eğilme momenti ve kesme kuvveti bakımından **ig çubuğu** gibi davranacaktır. i düğüm noktasının dengesinde bu çubuklar (**ig** ve **in**) sadece kendi üzerindeki yüklerden meydana gelecek uç momentini alır. Diğer bir anlatımla bu çubuklarda sistemin diğer çubuklarındaki etkilerden veya düğüme etkiyen bir momentten dolayı herhangi bir uç moment meydana gelmez. Bu durumda bilinmeyen sadece i rijit düğüm noktasındaki dönme açısıdır.

2. Hiperstatik Sistemler

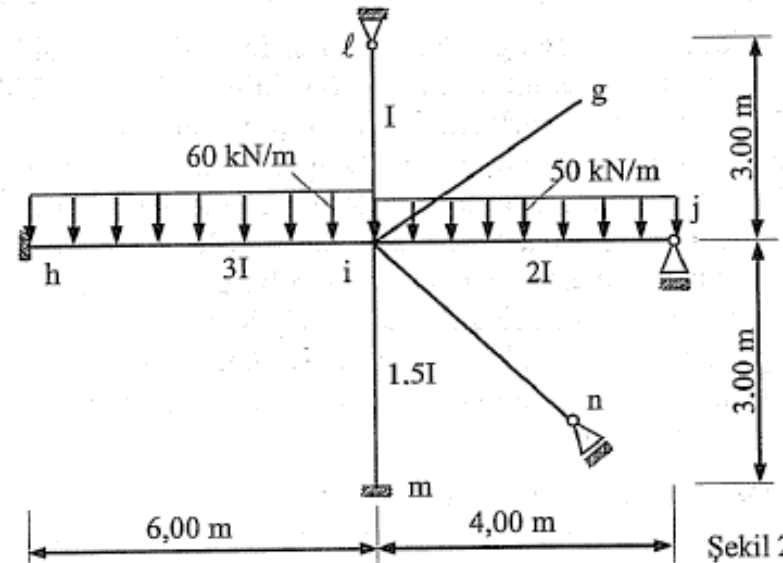
Önce sistemin i düğümünün dönmeyecek şekilde kilitli olduğunu düşünelim. Mafsallı olan ℓ ve j mesnetleri kilitlenmez ancak bunların ankastrelik uç kuvvetleri ve birim ver değiştirme sabitleri bu özelliği göz önüne alınarak hesaplanır. Örneğin ij çubuğunda ankastrelik uç momentleri $\overline{M}_{ij} = qL_{ij}^2 / 8$ ve i ℓ çubuğunda yük olmadığından $\overline{M}_{i\ell} = 0$ bulunur.

Sistemlerde sadece yüklü çubuklarda ankastrelik uç momentleri oluşacaktır. Bu sistemde sadece hi ve ij çubukları yüklüdür ve bunların ankastrelik uç momentleri Çizelge 2.4.1'den veya (2.5.4) eşitliklerinden hesaplanabilir.



2. Hiperstatik Sistemler

i düğüm noktası kilitli olduğundan şimdi sadece yüklü çubukların ucunda ankastrelik uç momentleri bulunmaktadır. Eğer kilit açılır ve düğüm noktası dönerse bu düğüm noktasında birleşen ig ve in çubuklarının dışında diğer tüm çubuklarda yeni uç momentleri oluşacaktır. Düğüm, ankastrelik uç momentlerini dengelemek için çubukların i uçlarında yeterli uç momenti oluşuncaya kadar dönmeye devam eder. Doğal olarak i düğümünde birleşen ve diğer uçları rijit düğüm noktası ve ankastre mesnet olan çubukların bu uçlarında da uç momentleri oluşacaktır. Bu örnekte h ve m noktalarında. i düğümünde denge sağlandığında, sistem son denge konumuna yaklaşır ve i düğümünde birleşen çubukların bu uçlarındaki uç momentleri, ankastrelik uç momentleri ve i düğümünün dönmesinin sebep olduğu uç momentlerinin cebirsel toplamına eşit olur.



2. Hiperstatik Sistemler

Yukarıda açıklanan işlem genel anlamda bir moment dağıtım yöntemidir. Yukarıdaki işlemin açıklamasını basitleştirmek için kesin bir terminolojiyi adapte etmek uygun olur. Tüm düğüm noktaları dönmeye karşı kilitli sisteme yükler uygulandığında oluşan uç momentleri **ankastrelik uç momenti** terimi ile açıklanır. Düğümde kilit açıldığında düğüme etkiyen ankastrelik uç momentleri toplamı sıfıra eşit değilse dönecektir. Düğümde bu dönmeyi meydana getiren momente **dengelenmemiş moment** veya **kilit momenti** (M_{ik}) denir. Kilidi açılan dengelenmemiş moment etkisi altındaki düğüm noktası döner ve bu noktada birleşen çubukların uçlarında uç momentleri oluşur. Bu uç momentleri düğümde yeniden dengeyi sağlar ve bu **dağıtma momenti** olarak isimlendirilir. Düğüm noktası döndüğünde, bununla beraber, çubuklar eğilir, her birinin diğer ucunda bu uçtaki ile aynı yönünde uç momentleri oluşur. Bunlara da **geçiş momentleri** denir. Şekil 2.5.17b'de görüldüğü gibi çubuğu saat akrebi tersi yönünde, düğümü saat akrebi yönünde döndüren uç momentleri pozitifdir. Kilitli bir i düğümüne etkiyen dengelenmemiş moment, bu düğüm noktasına rijit olarak birleşmiş çubukların i uçlarındaki uç momentlerinin cebirsel toplamıdır.

2. Hiperstatik Sistemler

i düğüm noktasında birleşen çubukların uçlarındaki momentlerin toplamı $\sum M_{ij}$ ise düğüm noktasının moment denge şartından

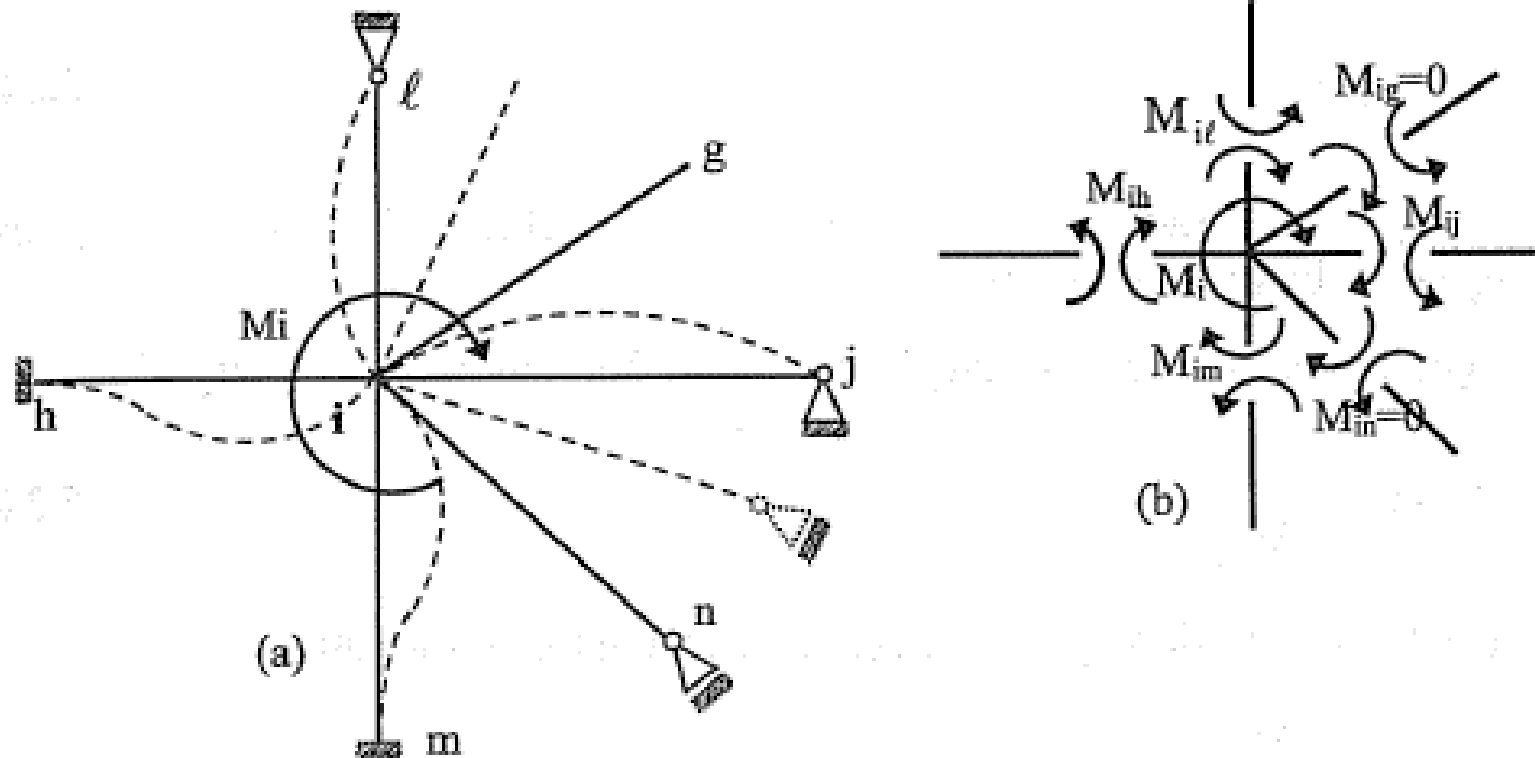
$$M_{ik} + \sum M_{ij} = 0 \text{ ve } M_{ik} = -\sum M_{ij}$$

olur. Görüldüğü gibi bir kilidin uyguladığı moment o düğüm noktasında birleşen çubukların uç momentlerinin cebirsel toplamının ters işaretlisidir.



2. Hiperstatik Sistemler

2.5.4.1.1 Dağıtma Sayıları



Şekil 2.5.17 i düğümünde etkiyen M_i momentlerinin çubuklara dağılımı

Şekilde 2.5.17a'da görülen sisteme i düğüm noktasında M_i momenti etkisin. M_i momentinden i çubuğunda birleşen çubukların uçlarına gelen momentleri (Şekil 2.5.17b) hesaplayalım.

2. Hiperstatik Sistemler

Düğüm noktasında Moment denge denkleminde

$$\sum M_i = 0 = M_i + M_{ij} + M_{i\ell} + M_{ih} + M_{im} + M_{in} + M_{ig}$$

$$M_i = -(M_{ij} + M_{i\ell} + M_{ih} + M_{im} + M_{in} + M_{ig}) \quad (2.5.31)$$

yazılır. Bilindiği gibi Bernoulli hipotezi gereğince, düğüm noktasında birleşen çubukların dönme açıları bir birine eşittir. Diğer bir anlatımla

$$\theta_{ij} = \theta_{i\ell} = \theta_{ih} = \theta_{im} = \theta_i \quad (2.5.32)$$

dir. Şekil 2.5.16 'ya bakıldığı zaman ig ve in çubuklarında uç momentler doğrudan o çubuktaki denge şartından bulunabilir. Şekil 2.5.16'daki gibi bu çubuklar yüksüz ise çubuk uç kuvvetleri de sıfır olur. Yukarıda bunların değerleri yerine sıfır konularak

$$M_i = -(M_{ij} + M_{i\ell} + M_{ih} + M_{im}) \quad (2.5.33)$$

elde edilir.

2. Hiperstatik Sistemler

Burada i düğümüne dışardan etki ettiği düşünülen M_i , hesap yönteminde M_{ik} dengelenmemiş veya kilit momenti olarak da düşünülebilir. Her çubukta θ_i dönme açısına bağlı olarak uç momentleri yazılır. Örneğin i ucundaki M_{ih} uç momenti θ_i açısına bağlı olarak

$$M_{ih} = m_{ih}^{ih} \cdot \theta_i$$

yazılır ve buradan

$$\theta_i = \theta_{ih} = \frac{M_{ih}}{m_{ih}^{ih}} \quad (2.5.34a)$$

olarak hesaplanır. Şimdi bu işlemi uç momenti alabilen düğüm noktasına rijit birleşmiş her çubuk için yazalım.

ij çubuğunun bir ucu rijit düğüm noktası diğer ucu mafsallı olduğu için

$$\theta_i = \theta_{ij} = \frac{M_{ij}}{\bar{m}_{ij}^{ij}} \quad (2.5.34b)$$

2. Hiperstatik Sistemler

$i\ell$ çubuğu bir rijit düğüm noktası diğer ucu mafsallı olduğu için

$$\theta_i = \theta_{i\ell} = \frac{M_{i\ell}}{\overline{m}_{i\ell}^{i\ell}} \quad (2.5.34c)$$

im çubuğunun bir ucu ankastre bir ucu rijit düğüm noktası olduğu için

$$\theta_i = \theta_{im} = \frac{M_{im}}{\overline{m}_{im}^{im}} \quad (2.5.34d)$$

dir. (2.5.32) eşitliğinde her çubuğun ucundaki açılar yerine (2.5.34) eşitliklerinde bulunan değerleri yerine konulur ve payların toplamının paydaların toplamına eşit olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{M_{ih}}{\overline{m}_{ih}^{ih}} = \frac{\overline{M}_{ij}}{\overline{m}_{ij}^{ij}} = \frac{\overline{M}_{i\ell}}{\overline{m}_{i\ell}^{i\ell}} = \frac{M_{im}}{\overline{m}_{im}^{im}} = \frac{M_{ih} + M_{ij} + M_{i\ell} + M_{im}}{\overline{m}_{ih}^{ih} + \overline{m}_{ij}^{ij} + \overline{m}_{i\ell}^{i\ell} + \overline{m}_{im}^{im}} = \frac{-M_i}{\sum \overline{m}_{i\ell}^{i\ell}} \quad (2.5.35)$$

elde edilir.

2. Hiperstatik Sistemler

Bu eşitliklerden

$$\frac{M_{ih}}{m_{i\theta i}^{ih}} = \frac{-M_i}{\sum m_{i\theta i}^{ih}} \quad (2.5.36a)$$

yazılarak ih ucundaki uç momenti

$$M_{ih} = -\frac{m_{i\theta i}^{ih}}{\sum m_{i\theta i}^{ih}} M_i \quad (2.5.36b)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$r_{ih} = \frac{m_{i\theta i}^{ih}}{\sum m_{i\theta i}^{ih}} \quad (2.5.36c)$$

ile gösterilir ve 2.5.36.b eşitliğinde yerine konulursa

$$M_{ih} = -r_{ih} M_i \quad (2.5.36d)$$

biçiminde bulunur. Burada r değerine **dağıtma sayısı** denir.

2. Hiperstatik Sistemler

$$\frac{M_{ij}}{\bar{m}_{i\theta i}^{ij}} = \frac{-M_i}{\sum m_{i\theta i}}, \quad M_{ij} = -\frac{\bar{m}_{i\theta}^{ij}}{\sum m_{i\theta}} M_i, \quad r_{ij} = \frac{\bar{m}_{i\theta}^{ij}}{\sum m_{i\theta}} \quad \text{ve} \quad M_{ij} = -r_{ij} M_i \quad (2.5.37a,b,c,d)$$

$$\frac{M_{i\ell}}{\bar{m}_{i\theta i}^{i\ell}} = \frac{-M_i}{\sum m_{i\theta i}}, \quad M_{i\ell} = -\frac{\bar{m}_{i\theta i}^{i\ell}}{\sum m_{i\theta i}} M_i, \quad r_{i\ell} = \frac{\bar{m}_{i\theta}^{i\ell}}{\sum m_{i\theta}} \quad \text{ve} \quad M_{i\ell} = -r_{i\ell} M_i \quad (2.5.38a,b,c,d)$$

$$\frac{M_{im}}{\bar{m}_{i\theta i}^{im}} = \frac{-M_i}{\sum m_{i\theta i}}, \quad M_{im} = -\frac{\bar{m}_{i\theta i}^{im}}{\sum m_{i\theta i}} M_i, \quad r_{im} = \frac{\bar{m}_{i\theta}^{im}}{\sum m_{i\theta}} \quad \text{ve} \quad M_{im} = -r_{im} M_i \quad (2.5.39a,b,c,d)$$

şeklinde yazılır.

$$M_{ih} + M_{ij} + M_{i\ell} + M_{im} = -M_i$$

eşitliğinde M_{ij} 'ler yerine (2.5.36), (2.5.37), (2.5.38) ve (2.5.39) eşitliklerindeki değerleri yazılarak

$$-r_{ih} M_i - r_{ij} M_i - r_{i\ell} M_i - r_{im} M_i = -M_i$$

2. Hiperstatik Sistemler

$$-M_i \sum r_{ik} = -M_i$$

elde edilir. Bu eşitliğe göre dağıtma sayıları toplamı $\sum r_{ik} = 1$ olur. Genel olarak n sayıda çubuğun birleştiği bir i düğüm noktasında ij çubuğuna ait dağıtma sayısı

$$r_{ij} = \frac{m_{i0i}^{ij}}{\sum_{j=1}^n m_{i0i}^{ij}} \quad (2.5.40)$$

şeklinde yazılır.

Görüldüğü gibi M_i dış momenti veya i ucundaki dengelenmemiş moment r dağıtma sayısı ile çarpılıp işaret değiştirilerek uç momentleri elde edilmektedir.

Diğer ucu mafsallı, sabit mesnet ve çubuk eksenini doğrultusunda kayıcı mesnet olan çubukların birim yer değiştirme sabitlerinde bu durumlar göz önünde tutularak m_{i0i} 'ler yerine $\bar{m}_{i0i}$ 'lerin alınması gerekmektedir.

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.4.1.1 Sabit atalet momentli çubuklar

İki ucu rijit düğüm noktası olan sabit atalet momentli çubuklarda $m_{i\theta i} = 4Ek$ ve bir ucu rijit diğer ucu mafsallı atalet momenti sabit çubuklarda $\bar{m}_{i\theta i} = 3Ek$ 'dir.

Şekil 2.5.16'da boyutları verilen sistemde birim yer değiştirme sabitleri

İh çubuğunda $k_{ih} = 3I/6$ ve $m_{i\theta i}^{ih} = 4Ek = 4E \times 3I/6 = 2EI$

ij çubuğunda $k_{ij} = 2I/4$ ve $\bar{m}_{i\theta i}^{ij} = 3Ek = 3E \times 2I/4 = 1,5EI$

iℓ çubuğunda $k_{i\ell} = I/3$ ve $\bar{m}_{i\theta i}^{i\ell} = 3Ek = 3EI/3 = EI$

im çubuğunda $k_{im} = 1,5I/3$ ve $m_{i\theta i}^{im} = 4Ek = 4E \times 1,5I/3 = 2EI$

şeklinde bulunur.

2. Hiperstatik Sistemler

Bu değerler yerine konularak i düğümündeki dağıtma sayıları

$$r_{ih} = \frac{2EI}{2EI + 1,5EI + EI + 2EI} = \frac{2EI}{6,5EI} = 0,31$$

$$r_{ij} = \frac{1,5EI}{6,5EI} = 0,23$$

$$r_{il} = \frac{EI}{6,5EI} = 0,15$$

$$r_{im} = \frac{2EI}{6,5EI} = 0,31$$

şeklinde hesaplanır.

$$\text{Kontrol : } \sum r = 0,31 + 0,23 + 0,15 + 0,31 = 1$$

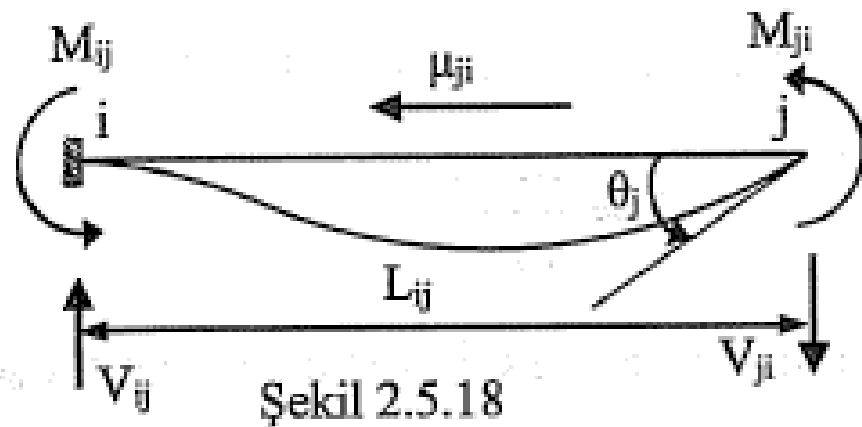
olduğundan bulunan değerler doğrudur.

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.4.1.2 Geçiş sayıları

2.5.4.2.1 j ucundan i ucuna geçiş

Şimdi geçiş momenti terimini açıklayalım. Şekil 2.5.18'de gösterildiği gibi j ucu θ_j kadar dönen ve ucunda M_{ji} dağıtma momenti oluşan herhangi bir çubuğu göz önüne alalım. j noktasının kilidinin açık ve dönebildiğini ve i noktasının kilitli ve dönme açısının sıfır olduğuna dikkat edelim. Çubukta lineer yer değiştirme de olmadığından $\delta_{ij} = \psi_{ij} = 0$ 'dır.



Şekil 2.5.18

Bu durumda uç momentleri

$M_{ij} = m_{i\theta j} \theta_j$ ve $M_{ji} = m_{j\theta j} \theta_j$
yazılabilir. Burada 2. eşitlikten

$$\theta_j = \frac{M_{ji}}{m_{j\theta j}}$$

bulunur ve 1. eşitlikte yerine konulursa

$$M_{ij} = \frac{m_{i\theta j}}{m_{j\theta j}} M_{ji} \quad \text{elde edilir.}$$

(2.5.41)

2. Hiperstatik Sistemler

İşte burada $\frac{m_{i\theta j}}{m_{j\theta j}}$ değerine j'den i'ye geçiş sayısı denir ve μ_{ji} ile gösterilir. j_i indisi j ucundaki dağıtma momentinin i ucuna geçişini göstermektedir. Bu durumda

$$\mu_{ji} = \frac{m_{i\theta j}}{m_{j\theta j}} \quad (2.5.42)$$

ve

$$M_{ij} = \mu_{ji} M_{ji} \quad (2.5.43)$$

şeklinde yazılır. Çubuk boyunca atalet momentinin sabit olması durumunda $m_{i\theta j} = 2Ek$ ve $m_{j\theta j} = 4Ek$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mu_{ji} &= \frac{2Ek}{4Ek} \\ \mu_{ji} &= 0,5 \end{aligned} \quad (2.5.44)$$

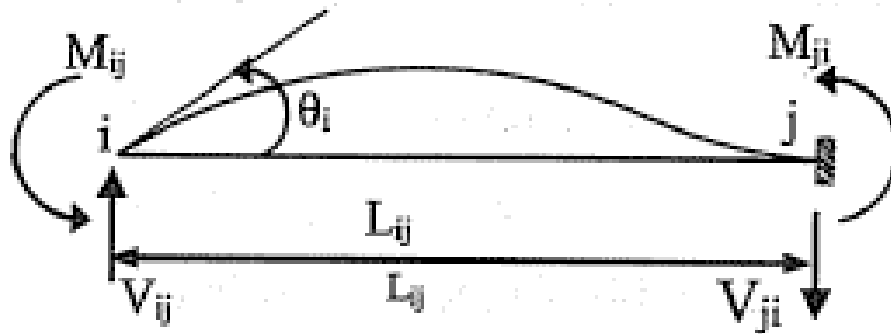
bulunur ve

$$M_{ij} = 0,5 M_{ji} \quad \text{olur.} \quad (2.5.45)$$

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.4.2.2 i ucundan j ucuna geçiş

Şekil 2.5.19’da gösterildiği gibi i ucu θ_i kadar dönen ve bu ucunda M_{ij} dağıtma momenti oluşan herhangi bir çubuğu göz önüne alalım. i noktasının kilidinin açık ve dönebildiğini ve j noktasının kilitli ve dönme açısının sıfır olduğuna dikkat edelim. Çubukta lineer yer değiştirmede olmadığından $\delta_{ij} = \psi_{ij} = 0$ dır.



Şekil 2.5.19

$$M_{ij} = m_{i\theta i} \theta_i \text{ ve } M_{ji} = m_{j\theta i} \theta_i$$

yazılabilir. Burada 1. eşitlikten

$$\theta_i = \frac{M_{ij}}{m_{i\theta i}}$$

bulunur ve 2. eşitlikte yerine konulursa

$$M_{ji} = \frac{m_{j\theta i}}{m_{i\theta i}} M_{ij} \quad (2.5.46)$$

elde edilir.

2. Hiperstatik Sistemler

İşte burada $\frac{m_{j\theta i}}{m_{i\theta i}}$ değerine **i'den j'ye geçiş sayısı** denir ve μ_{ij} ile

gösterilir. ij indisi i ucundaki dağıtma momentinin j ucuna geçişini göstermektedir.

Bu durumda

$$\mu_{ij} = \frac{m_{j\theta i}}{m_{i\theta i}} \quad (2.5.47)$$

ve

$$M_{ji} = \mu_{ij} M_{ij} \quad (2.5.48)$$

şeklinde yazılır. Çubuk boyunca atalet momentinin sabit olması durumunda $m_{j\theta i} = 2Ek$ ve $m_{i\theta i} = 4Ek$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \frac{2Ek}{4Ek} \\ \mu_{ij} &= 0,5 \end{aligned} \quad (2.5.49)$$

ve

$$M_{ji} = 0,5 M_{ij} \quad (2.5.50)$$

olur. Görüldüğü gibi atalet momenti sabit çubuklarda hem i 'den j 'ye ve hem de j 'den i 'ye geçiş sayısı 0,5 'dir.

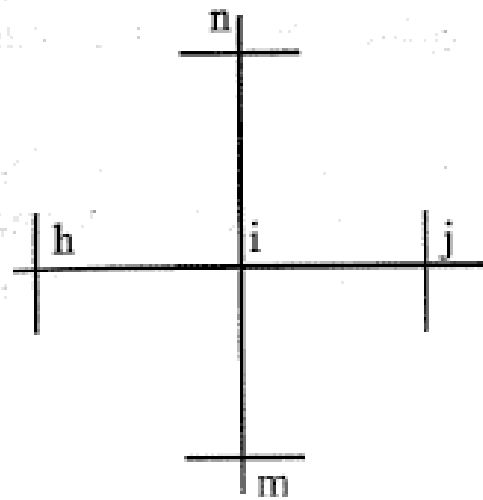
2. Hiperstatik Sistemler

2.5.4.2 Hesaplama işlemi

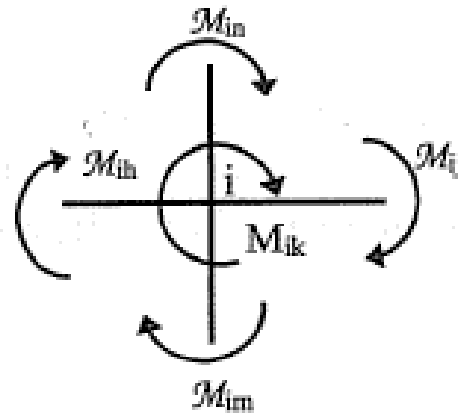
2.5.4.2.1-Dengeleme

1) Sistemin tüm rijit düğüm noktaları kilitlenir (Şekil 2.5.20a). Bu durumda tüm rijit düğüm noktalarındaki çubukların ucunda sadece kendi üzerlerindeki yüklerden meydana gelen ankastrelik uç momentleri vardır ve düğüm noktalarının dengelenmemiş (kilit) momentleri bu ankastrelik uç momentlerinin cebirsel toplamıdır (Şekil 2.5.20b).

2) Önce bu düğüm noktalarından biri, örneğin kilit momenti en büyük olanı serbest bırakılır (Şekil 2.5.20c).

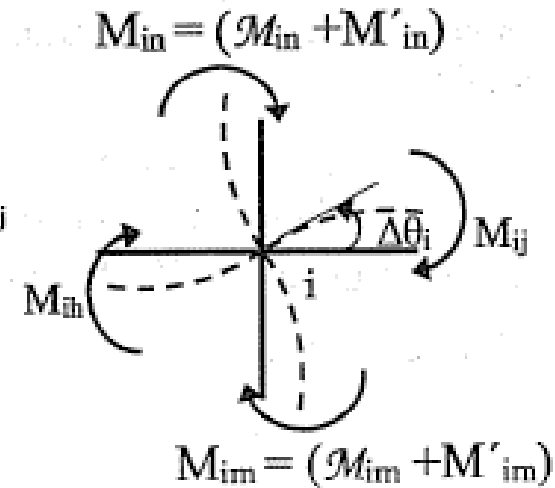


(a)



(b)

$$M_{ik} = -(M_{ih} + M_{ij} + M_{in} + M_{im})$$



(c)

Şekil 2.5.20

2. Hiperstatik Sistemler

Bu düğüm noktası $\Delta\theta_i$ kadar dönerek denge durumuna gelir. Bu sırada bu düğüm noktasında birleşen çubukların iki uçlarında yeni uç momentleri meydana gelecektir. M_{ik} momentini uygulayan bir kilidin kaldırılmasından meydana gelen tesirler ile düğüm noktasına dışarıdan $-M_{ik}$ momentinin veya ona eşit olan uç momentleri toplamının uygulamasından meydana gelen tesirler bir birine eşittir. O halde bir i kilidinin kaldırılmasından ij çubuklarının i ucunda meydana gelen uç momentleri, mevcut uç momentleri toplamı olan $M_{ik} = -(M_{ih} + M_{ij} + M_{in} + M_{im})$ **dengelenmemiş moment** değerinin dağıtma sayıları ile çarpımının ters işaretlisi olarak elde edilir. Bunlara **dağıtma momentleri** denir ve M' ile gösterilir ve değerleri

$$M'_{ih} = -r_{ih}M_{ik}, \quad M'_{ij} = -r_{ij}M_{ik}, \quad M'_{in} = -r_{in}M_{ik}, \quad M'_{im} = -r_{im}M_{ik} \quad (2.5.51)$$

şeklinde elde edilir.

3) Bu uç momentleri (dağıtma momentleri) geçiş sayıları ile çarpılarak çubukların diğer uçlarındaki momentler bulunur. Bunlara **geçiş momentleri** denir ve M'' ile gösterilir ve değerleri

2. Hiperstatik Sistemler

$$M_{hi}'' = \mu_{ih} M'_{ih}, M_{ji}'' = \mu_{ij} M'_{ij}, M_{ni}'' = \mu_{in} M'_{in}, M_{mi}'' = \mu_{im} M'_{im} \quad (2.5.52)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda denge konumuna gelen i düğümünde birleşen çubukların bu uçlarındaki uç momenti

$$M_{ij} = \mathcal{M}_{ij} + M_{ij}' \quad (2.5.53)$$

olur. Çubukların kilitli diğer uçlarındaki uç momentleri

$$M_{ji} = \mathcal{M}_{ji} + M_{ji}'' \quad (2.5.54)$$

olacaktır. Kilidi kaldırılmış olan bir i düğüm noktası kendi kendine denge konumuna geldiği için, i düğümünde birleşen çubukların M_{ij} uç momentlerinin toplamı sıfıra eşit olacaktır. Bunu belirlemek için dağıtma momentinin altları çizilir.



2. Hiperstatik Sistemler

4) i düğüm noktasında kilidin kaldırılmasından dolayı bu noktada meydana gelen $\Delta\theta_i$ dönme açısı bu düğümde birleşen çubuklardan herhangi birinin ucunda meydana gelen M'_{ij} dağıtma momentinin kendisine ait $m_{i\theta_i}$ birim yer değiştirme sabitine bölünerek

$$\Delta\theta_i = \frac{M'_{ij}}{m_{i\theta_i}} \quad \text{veya} \quad \Delta\theta_i = \frac{M'_{in}}{m_{i\theta_i}} \quad (2.5.55)$$

şeklinde elde edilir.

5) Sırayla bütün düğüm noktalarındaki kilitler birer birer kaldırılıp yeniden takılarak sistem adım adım kendine etkiyen dış yüklere ait denge konumuna yaklaştırılır. Her adımda, diğer bir anlatımla her düğüm noktasının açılmasında, yapılan işlemler yukarıda anlatılanların aynıdır. Kilidi açılan düğüm noktasında geçiş momentlerinin de bulunması durumunda i düğüm noktasındaki M_{ik} kilit momentlerinin (dengelenmemiş momentlerin) hesabında o düğümde birleşen çubukların uçlarındaki ankastrelik uç momentlerinin yanında M'' geçiş momentlerinin de katılması gerekir.

$$M_{ik} = \sum \mathcal{M}_{ij} + \sum M''_{ij} \quad (2.5.56)$$

2. Hiperstatik Sistemler

6) Sistemdeki tüm düğüm noktalarında 1. dengelemeler bittikten sonra M_{ik} kilit momenti değerleri o düğüm noktasında son dengelemelerden geçmiş olan ve dengeyi bozan o düğüm noktasında birleşen tüm çubuklardaki M''_{ij} geçiş momentlerinin toplamı olacağı doğaldır. Diğer bir anlatımla

$$M_{ik} = \sum M''_{ij} \quad (2.5.57)$$

olacaktır. Yukarıdaki açıklamalardan da açıkça anlaşıldığı gibi serbest bırakılan bir i düğüm noktasında dengenin tekrar sağlanması için bu düğüm noktasında birleşen çubukların uçlarındaki dengeyi bozan geçiş momentleri toplamı ile hemen altına yazılan yeni dağıtma momentleri toplamı sıfıra eşit olmalıdır. Bunun için 2. ve daha sonraki dengelemelerde geçiş momentleri toplamı dağıtma sayıları ile çarpılıp işaretleri değiştirilerek çubukların aynı (i) uçlarına yazılır. Bu dağıtma momentleri geçiş sayıları ile çarpılarak çubukların diğer j uçlarına geçiş momenti olarak yazılır.

2. Hiperstatik Sistemler

Bu işlem yeter derecede tekrarlandıktan sonra her düğüm noktasında dengelenmemiş M'' geçiş momentlerinin toplamının sıfıra yaklaştığı görülür. Bu toplamın ters işaretlisi olan kilit momenti de sıfıra yaklaşmış olacağından sistem kendisine etkiyen dış yükler için denge konumuna ulaşmış sayılabilir. Bundan sonra bu dengeleme işlemine son verilir.

7) Her çubuğun ucundaki sonuç uç momentleri

$$M_{ij} = \mathcal{M}_{\bar{ij}} + \sum \mathcal{M}'_{\bar{ij}} + \sum \mathcal{M}''_{\bar{ij}} \quad (2.5.58)$$

eşitliği ile hesaplanır.

Örnek 2.5.1

Yukarıda anlatılanları daha iyi anlamak için Şekil 2.5.21'de verilen iki açıklıklı, iki katlı 9 düğüm noktalı sistemi ele alıp yapılacak işlemleri bu sistem üzerinde açıklayalım.

1. Sistemin her bir düğüm noktasında birleşen çubukların her düğüm noktası için m_{18i} değerleri hesaplanır.

2. Her düğüm noktasında r_{ij} dağıtma sayıları hesaplanır ve düğüm noktasında uygun yerlere yazılır.

2. Hiperstatik Sistemler

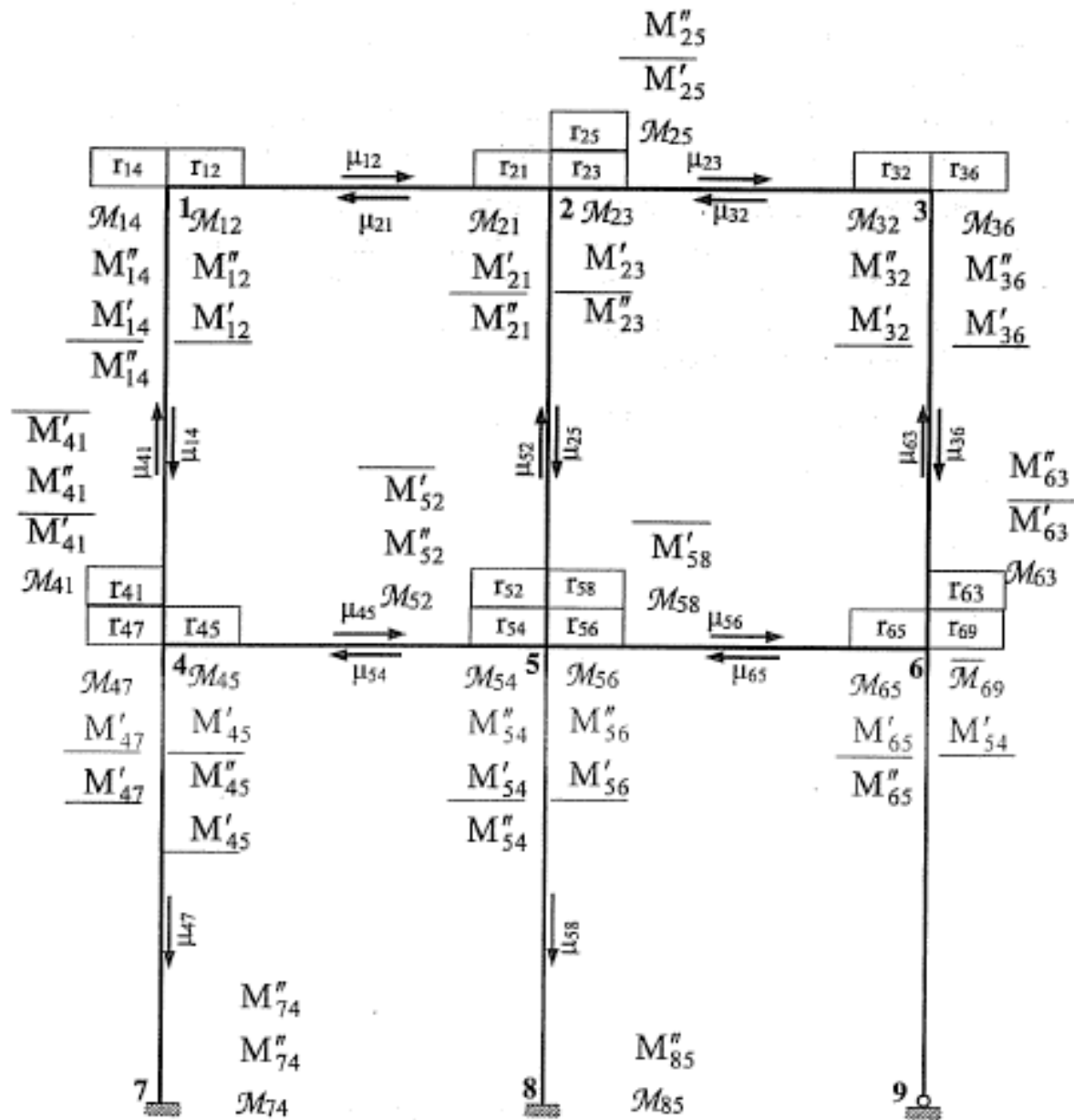
3. Geçiş sayıları hesaplanır ve çubuklar üzerinde uygun yerlere yazılır. Atalet momenti sabit çubuklarda geçiş sayısı 0,5 olduğundan yazılmadan da işlem yapılabilir.

4. Her çubuk için ankastrelik uç momentleri hesaplanır ve mümkün olduğunca dağıtma sayılarının altına veya yan taraflarına yazılır.

5. Tüm düğüm noktaları kilitlenir ve dengelenmemiş momenti en büyük olan düğüm noktasının kilidi açılarak dengelemeye başlanır. Gerçekte herhangi bir düğüm noktasından başlanılabilir. Dengelenmemiş momentin en büyük olduğu noktadan başlanırsa işlem biraz daha kısa zamanda tamamlanabilir. En azından bir iki dengeleme az yapılmış olur.

Dengelemeler, dağıtma sayıları, geçiş sayıları ve ankastrelik uç momentleri bu şekilde şekil üzerine yazılarak dengeleme şekil üzerinde yapılabileceği gibi özellikle çok katlı ve düğüm noktası sayısı fazla olan sistemlerde çizelgede de yapılabilir. Üzerideki örneklerde çizelge ile dengelemenin nasıl yapılacağı gösterilecektir.

2. Hiperstatik Sistemler



Şekil 2.5.21

2. Hiperstatik Sistemler

6. Aşağıda belirtildiği şekilde dengelemeler yapılır.

1. Dengeleme

En büyük dengelenmemiş momentin 4 düğüm noktasında olduğu varsayılarak dengelemeye bu düğüm noktasından başlanılmıştır. İlk dengeleme olduğundan dengelenmemiş moment (kilit momenti) bu düğüm noktasındaki moment denge şartından ankastrelik uç momentleri toplamı olacaktır.

4 düğüm noktasında $\sum M_4 = 0$ denge şartından

Dengelenmemiş (kilit) momenti $M_{4k} = \mathcal{M}_{41} + \mathcal{M}_{45} + \mathcal{M}_{47}$

Dağıtma momentleri $M'_{41} = -M_{4k}r_{41}$, $M'_{45} = -M_{4k}r_{45}$, $M'_{47} = -M_{4k}r_{47}$

Geçiş momentleri $M''_{14} = M'_{41}\mu_{41}$, $M''_{54} = M'_{45}\mu_{45}$, $M''_{74} = M'_{47}\mu_{47}$

bulunur ve M' dağıtma momentlerinin altı veya üstü çizilir ($\overline{M}'_{41}$, $\underline{M}'_{47}$ ve $\underline{M}'_{45}$).

2. Hiperstatik Sistemler

2. Dengeleme

6 düğüm noktasında $\sum M_6 = 0$ denge şartından,

Dengelenmemiş (kilit) momenti $M_{6k} = \mathcal{M}_{63} + \mathcal{M}_{65} + \overline{\mathcal{M}}_{69}$

Dağıtma momentleri $M'_{63} = -M_{6k}r_{63}$, $M'_{65} = -M_{6k}r_{65}$, $M'_{69} = -M_{6k}r_{69}$

Geçiş momentleri $M''_{36} = M'_{63}\mu_{63}$, $M''_{56} = M'_{65}\mu_{65}$

bulunur ve M' dağıtma momentlerinin altı veya üstü çizilir.

3. Dengeleme

2 düğüm noktasında $\sum M_2 = 0$ denge şartından,

Dengelenmemiş (kilit) momenti $M_{2k} = \mathcal{M}_{21} + \mathcal{M}_{23} + \mathcal{M}_{25}$

Dağıtma momentleri $M'_{21} = -M_{2k}r_{21}$, $M'_{23} = -M_{2k}r_{23}$, $M'_{25} = -M_{2k}r_{25}$

Geçiş momentleri $M''_{12} = M'_{21}\mu_{21}$, $M''_{32} = M'_{23}\mu_{23}$, $M''_{52} = M'_{25}\mu_{25}$

bulunur ve M' dağıtma momentlerinin altı veya üstü çizilir.

2. Hiperstatik Sistemler

4. Dengeleme

4. dengeleme 1, 3 ve 5 düğüm noktalarından birinde yapılabilir. Burada 5 düğüm noktasında yapılacaktır. Bu düğüm noktasında dengelenmemiş moment olarak ankastrelik uç momentleri ve geçiş uç momentlerinin toplamı olacaktır.

5 düğüm noktasında $\sum M_5 = 0$ denge şartından,

Dengelenmemiş (kilit) momenti

$$M_{5k} = \mathcal{M}_{52} + \mathcal{M}_{54} + \mathcal{M}_{56} + \mathcal{M}_{58} + M_{52}'' + M_{54}'' + M_{56}''$$

Dağıtma momentleri $M'_{52} = -M_{5k}r_{52}$, $M'_{54} = -M_{5k}r_{54}$, $M'_{56} = -M_{5k}r_{56}$

$$M'_{58} = -M_{5k}r_{58}$$

Geçiş momentleri $M''_{25} = M'_{52}\mu_{52}$, $M''_{45} = M'_{54}\mu_{54}$, $M''_{65} = M'_{56}\mu_{56}$

$$M''_{85} = M'_{58}\mu_{58}$$

bulunur ve M' dağıtma momentlerinin altı veya üstü çizilir.

2. Hiperstatik Sistemler

5. Dengeleme

1 düğüm noktasında $\sum M_1 = 0$ denge şartından,

Dengelenmemiş (kilit) momenti $M_{1k} = \mathcal{M}_{14} + \mathcal{M}_{12} + M''_{14} + M''_{12}$

Dağıtma momentleri $M'_{12} = -M_{1k}r_{12}$, $M'_{14} = -M_{1k}r_{14}$

Geçiş momentleri $M''_{21} = M'_{12}\mu_{12}$, $M''_{41} = M'_{14}\mu_{14}$

bulunur ve M' dağıtma momentlerinin altları çizilir.



2. Hiperstatik Sistemler

6. Dengeleme

3 düğüm noktasında $\sum M_3 = 0$ moment denge şartından

Dengelenmemiş (kilit) momenti $M_{3k} = \mathcal{M}_{32} + \mathcal{M}_{36} + M_{32}'' + M_{36}''$

Dağıtma momentleri $M'_{32} = -M_{3k} r_{32}$, $M'_{36} = -M_{3k} r_{36}$

Geçiş momentleri $M''_{23} = M'_{32} \mu_{32}$, $M''_{63} = M'_{36} \mu_{36}$

bulunur ve M' dağıtma momentlerinin altları çizilir.

Böylece tüm düğüm noktalarında 1. dengelemeler tamamlanmış olur. Bundan sonra artık düğüm noktalarındaki dengelenmemiş momentler çubuk uçlarındaki geçiş momentlerinin toplamı olur.



2. Hiperstatik Sistemler

7. Dengeleme

4 düğüm noktasında $\sum M_4 = 0$ denge şartından,

Dengelenmemiş (kilit) momenti $M_{4k} = M''_{41} + M''_{45}$

Dağıtma momentleri $M'_{41} = -M_{4k}r_{41}$, $M'_{45} = -M_{4k}r_{45}$, $M'_{47} = -M_{4k}r_{47}$

Geçiş momentleri $M''_{14} = M'_{41}\mu_{41}$, $M''_{54} = M'_{45}\mu_{45}$, $M''_{74} = M'_{47}\mu_{47}$

bulunur ve M' dağıtma momentlerinin altı veya üstü çizilir. Bu işleme her düğüm noktasındaki dengelenmemiş momentlerin toplamının sıfıra yaklaşması durumuna kadar devam edilir.



2. Hiperstatik Sistemler

2.5.4.2.2 Uç Momentleri ve Eğilme Momentleri

Her çubuğun ucunda bulunan $\mathcal{M}$ ankastrelik uç momentleri, M' dağıtma momentleri ve M'' geçiş momentleri toplanarak çubuğun o ucunda meydana gelen sonuç uç momentleri elde edilir.

$$M_{ij} = \mathcal{M}_{ij} + \sum M'_{ij} + \sum M''_{ij} \quad (2.5.58)$$

Bunlardan bakış yönü dikkate alınarak eğilme momentleri ve işaretleri belirlenir.

2.5.4.2.3 Çubuk Eksenine Dik Uç Kuvvetleri ve Kesme Kuvvetleri

Her çubukta denge denklemleri yazılarak; V_{0ij} , uç momentleri sıfır olan çubuktaki uç kuvvetleri olmak üzere çubuk eksenine dik uç kuvvetleri ve kesme kuvvetleri

$$V_{ij} = V_{0ij} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} \quad \text{ve} \quad V_{ji} = V_{0ji} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} \quad (2.5.59.a \text{ ve } b)$$

şeklinde veya doğrudan çubuktaki moment denge denklemlerinden hesaplanır.

2. Hiperstatik Sistemler

2.5.4.2.4 Çubuk Eksenine Paralel Uç Kuvvetleri ve Normal Kuvvetler

Sistemin düğüm noktalarında kullanılmayan $\sum P_x = 0$ ve $\sum P_y = 0$ şartlarından çubuk eksenine paralel N_{ij} uç kuvvetleri ve normal kuvvetler hesaplanır.

2.5.4.2.5 Mesnet Tepkileri

Mesnetlerin bulunduğu uçlardaki uç kuvvetleri ve denge şartları göz önünde tutularak mesnet tepkileri hesaplanır.

2.5.4.2.6-Düğüm Noktalarının Dönme Açıları

Herhangi bir i düğüm noktasındaki θ_i dönme açısı bu düğüm noktasında birleşen çubukların her birinin veya herhangi birinin i ucundaki M' dağıtma momentlerinin toplamı o çubuğa ait $m_{i\theta i}$ birim yer değiştirme sabitine bölünerek

$$\theta_i = \frac{\sum_{m=1}^n M'_{ij,m}}{m_{i\theta i}^{ij}} \quad (2.5.60)$$

şeklinde bulunur. Burada m o düğüm noktasındaki dengeleme adım numarasını ve n toplam dengeleme sayısını gösterir.

STATİK GÖZÜMÜ

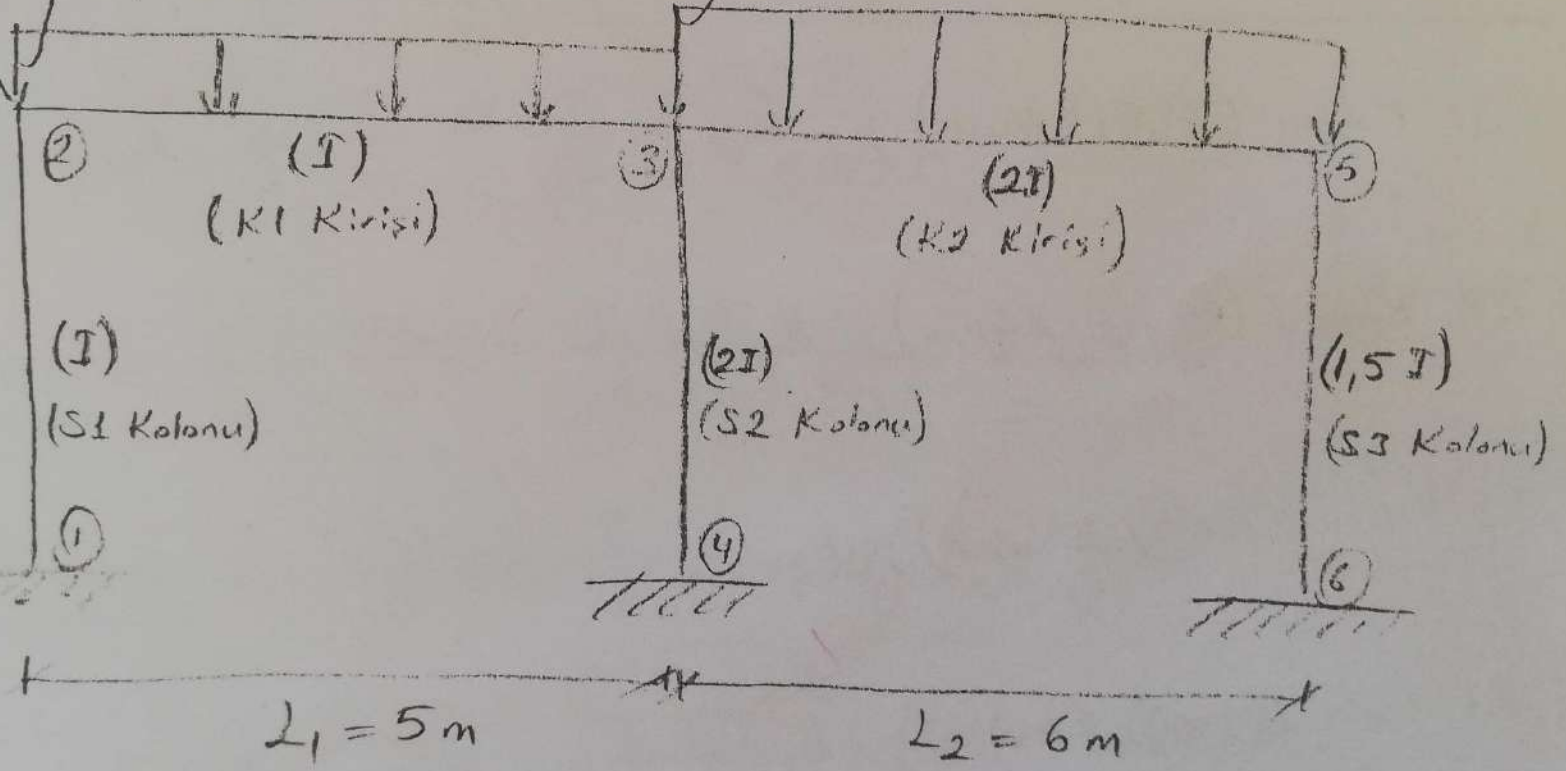
Dr. Müslüm Murat
Maras

①

$$q_1 = 10 \text{ kN/m}$$

$$q_2 = 15 \text{ kN/m}$$

$$h = 4 \text{ m}$$



ÖRNEK; Şekilde verilen sistemi "Cross Metodu" kullanarak gözünüz.

(*) Cross Metodu (Moment Dağıtma Yöntemi) Adımları;

- ↳ Her bir eleman için " k_{ij} " rijitlik sayıları (faktörleri) hesaplanır.
- ↳ Her bir eleman için " D_{ij} " dağıtma katsayıları hesaplanır.
- ↳ Elemanlara ait " $M_{ij} = -M_{ji}$ " ankastrelik uç momentleri yazılır.
- ↳ Tüm düğüm noktaları "ankastre" kabul edilir ve her seferinde bir düğüm noktası serbest bırakılarak "moment dağıtma işlemi" yapılır.
- ↳ Serbest bırakılan düğümlerden diğer düğümlere "geçiş katsayısı ($c = 0,5$)" ile moment aktarımı yapılır.
- ↳ Dağıtılan momentler çok küçük veya belirsiz oluncaya kadar dağıtma işlemine devam edilir.
- ↳ Dağıtma işlemi bittikten sonra "eleman uçlarındaki momentler toplanarak" işlem tamamlanır.

(*) Eleman Rijitlik Faktörleri (k_{ij}); ($k_{ij} = \frac{I}{L_{ij}}$)

(2) (3)

S1 Kolonu (1~2 Elemanı); $k_{12} = \frac{I}{L_{12}} = \frac{I}{h} \Rightarrow k_{12} = \frac{I}{4} = \underline{0,25 I}$

S2 Kolonu (4~3 Elemanı); $k_{43} = \frac{I}{h} = \frac{2I}{4} = \frac{I}{2} = \underline{0,5 I}$

S3 Kolonu (6~5 Elemanı); $k_{65} = \frac{I}{h} = \frac{1,5 I}{4} = \underline{0,375 I}$

K1 Kirişi (2~3 Elemanı); $k_{23} = \frac{I}{L_1} = \frac{I}{5} = \underline{0,2 I}$

K2 Kirişi (3~5 Elemanı); $k_{35} = \frac{I}{L_2} = \frac{2I}{6} = \frac{I}{3} = \underline{0,333 I}$

(*) Dağıtma Katsayıları (D_{ij}); ($D_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sum k}$)

(2) Nolu Düşün Altkolona:

(*) Dağıtma Katsayıları (D_{ij}); ($D_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sum k}$)

② 2. Nolu Düğüm Noktasında;

$$D_{21} = \frac{k_{21}}{k_{21} + k_{23}} = \frac{0,25 \text{ T}}{0,25 \text{ T} + 0,2 \text{ T}} = \frac{0,25 \text{ T}}{0,45 \text{ T}} \approx \underline{0,556}$$

$$D_{23} = \frac{k_{23}}{k_{21} + k_{23}} = \frac{0,2 \text{ T}}{0,45 \text{ T}} = \underline{0,444}$$

$$\left. \begin{array}{l} D_2 = D_{21} + D_{23} \\ = 0,556 + 0,444 \\ = \underline{1} \end{array} \right\}$$

③ 3. Nolu Düğüm Noktasında;

$$D_{32} = \frac{k_{32}}{k_{32} + k_{34} + k_{35}} = \frac{0,2 \text{ T}}{0,2 \text{ T} + 0,5 \text{ T} + 0,333 \text{ T}} \approx \underline{0,194}$$

$$D_{34} = \frac{k_{34}}{k_{32} + k_{34} + k_{35}} = \frac{0,5 \text{ T}}{0,2 \text{ T} + 0,5 \text{ T} + 0,333 \text{ T}} = \underline{0,484}$$

$$D_{35} = \frac{k_{35}}{k_{32} + k_{34} + k_{35}} = \frac{0,333 \text{ T}}{0,2 \text{ T} + 0,5 \text{ T} + 0,333 \text{ T}} = \underline{0,322}$$

$$\left. \begin{array}{l} D_3 = D_{32} + D_{34} + D_{35} \\ = 0,194 + 0,484 + 0,322 \\ = \underline{1} \end{array} \right\}$$

(5) Nolu Düzgün Kloktaısından;

(3)

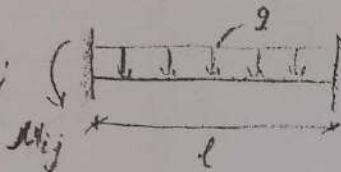
$$D_{53} = \frac{k_{53}}{k_{53} + k_{56}} = \frac{0,333 \text{ T}}{0,333 \text{ T} + 0,375 \text{ T}} = 0,470$$

$$D_{56} = \frac{k_{56}}{k_{53} + k_{56}} = \frac{0,375 \text{ T}}{0,333 \text{ T} + 0,375 \text{ T}} = 0,530$$

$$D_5 = 1$$

(*) Ankastrelik uç momentleri ($M_{ij} = -M_{ji}$);

K_1 Kirişi (2~3 Elemanı);



$$M_{ij} \Rightarrow M_{ij} = -M_{ji} = \frac{q l^2}{12}$$

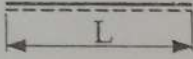
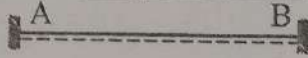
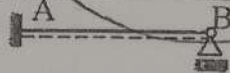
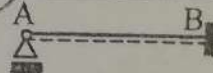
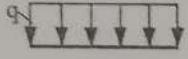
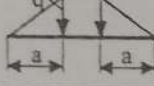
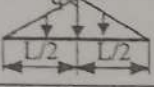
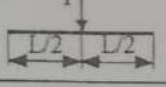
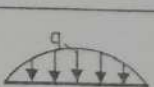
$$M_{23} = -M_{32} = \frac{10 (\text{kN/m}) \times (5 \text{ m})^2}{12} = 20,833 \text{ kN.m}$$

K_2 Kirişi (3~5 Elemanı);

$$M_{35} = -M_{53} = \frac{15 (\text{kN/m}) \times (6 \text{ m})^2}{12} = 45 \text{ kN.m}$$

4) S_1, S_2 ve S_3 kolonlarında yük olmadığından ankastrelik uç momentleri 0'dır.

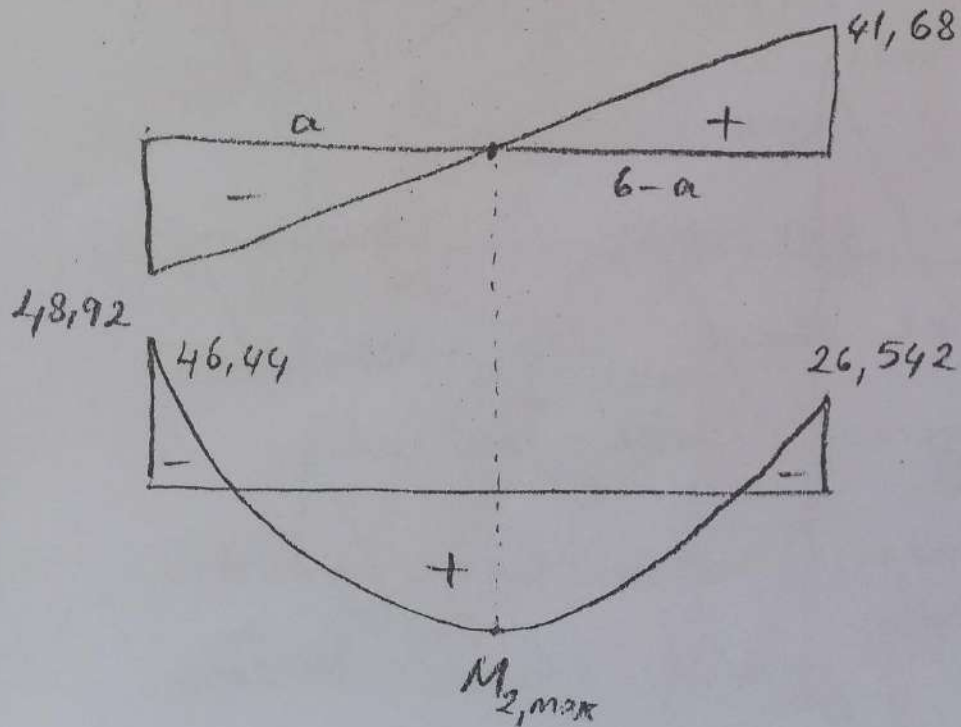
ÇİZELGE 2.4.1 ANKASTRELİK UÇ MOMENTLERİ

		  			
	Yük Şekli	M_A	M_B	$\bar{M}_A$	$\bar{M}_B$
1		$\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL^2}{8}$	$-\frac{qL^2}{8}$
2		$-\frac{qL^2}{12} [1 - \alpha^2 (2 - \alpha)]$	$-\frac{qL^2}{12} [1 - \alpha^2 (2 - \alpha)]$	$-\frac{qL^2}{8} [1 - \alpha^2 (2 - \alpha)]$	$-\frac{qL^2}{8} [1 - \alpha^2 (2 - \alpha)]$
3		$-\frac{5}{96} qL^2$	$-\frac{5}{96} qL^2$	$-\frac{5}{64} qL^2$	$-\frac{5}{64} qL^2$
4		$-\frac{1}{8} PL$	$-\frac{1}{8} PL$	$-\frac{3}{16} PL$	$-\frac{3}{16} PL$
5		$-\frac{L^2}{60} (3q_1 + 2q_2)$	$-\frac{L^2}{60} (2q_1 + 3q_2)$	$-\frac{L^2}{120} (8q_1 + 7q_2)$	$-\frac{L^2}{120} (7q_1 + 8q_2)$
6		$-\frac{1}{20} qL^2$	$-\frac{1}{30} qL^2$	$-\frac{1}{15} qL^2$	$-\frac{7}{120} qL^2$
7		$-\frac{1}{30} qL^2$	$-\frac{1}{20} qL^2$	$-\frac{7}{120} qL^2$	$-\frac{1}{15} qL^2$
8		$-\frac{1}{15} qL^2$	$-\frac{1}{15} qL^2$	$-\frac{1}{10} qL^2$	$-\frac{1}{10} qL^2$
$\alpha = a/L, \quad \beta = b/L,$ $\gamma = c/L$		(Çizelgedeki pozitif yönler Cross ve Açı yöntemi pozitif yönleri) 			

$$20,8x = 51,88 \Rightarrow \boxed{x = 2,075 \text{ m}}$$

$$\hookrightarrow M_{1,\max} = -9,88 + \frac{20,8 \times 2,075}{2} \Rightarrow \boxed{M_{1,\max} = 11,705 \text{ kN.m}}$$

(*) K2 Kirişi;



$$-46,44 + 48,92 \times \frac{a}{2} = 41,68 \frac{(6-a)}{2} - 26,54$$

$$45,3a = 144,94$$

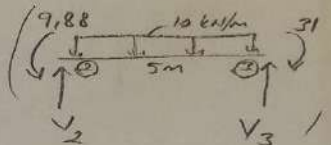
$$\boxed{a = 3,2 \text{ m}}$$

$$M_{2,\max} = -46,44 + \frac{48,92 \times 3,2}{2}$$

$$\boxed{M_{2,\max} = 31,81 \text{ kN.m}}$$

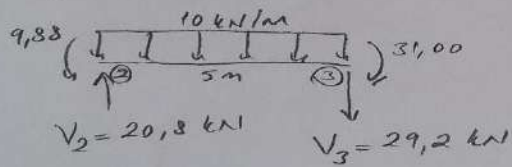
(*) (2) Nolu sayfada verilen Kesme Kuvvetinin Hesabında (V_{ij}) bulunan "kesme kuvveti değerleri doğrudur". Farklılık "YÖN"

KABULÜNDEN KAYNAKLANMAKTADIR...!"

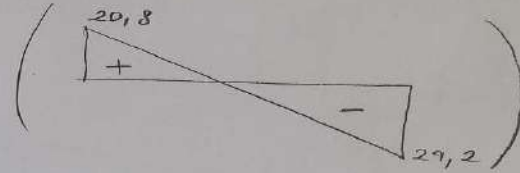
↳ Cross yöntemine (örnekte verilen durum için) göre ; 
 V_2 ve V_3 'ün değerleri pozitif (+) alınmıştır.

*** Ancak "M, N, T" grafiklerine geçirirken pozitif yön kabu-
lüne göre yapılması gerektiğinden bu örnekteki şubüğün

(2) Nolu düğüm noktasındaki Kesme Kuvveti (V_2) (+) ile, (3) Nolu
düğüm noktasındaki V_3 ise (-) ile garpilmalıdır. Bu durumda;



olacaktır.

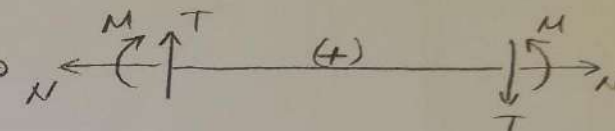


Örnekte verilen çerçeve sistemi aynı zamanda SAP2000 programında da çözümlenerek grafikleri ekte olarak size verilmiştir.

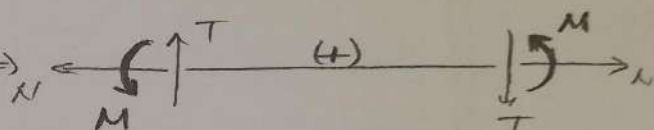
Programda Kesme kuvveti diyagramı izaret yönü olarak ters verilmiştir; karmaşıklık yaşamaması adına Cross yöntemi ile ekte edilen kesme kuvvetleri grafik olarak SAP2000 programına uygun olarak gösterilmiştir.

(*) Benzer durum moment için de söz konusudur. Cross yöntemine göre bulunan moment değerleri; qubugun i' ucunda (-) ile, j ucu-
da ise (+) ile garpılmaktadır.

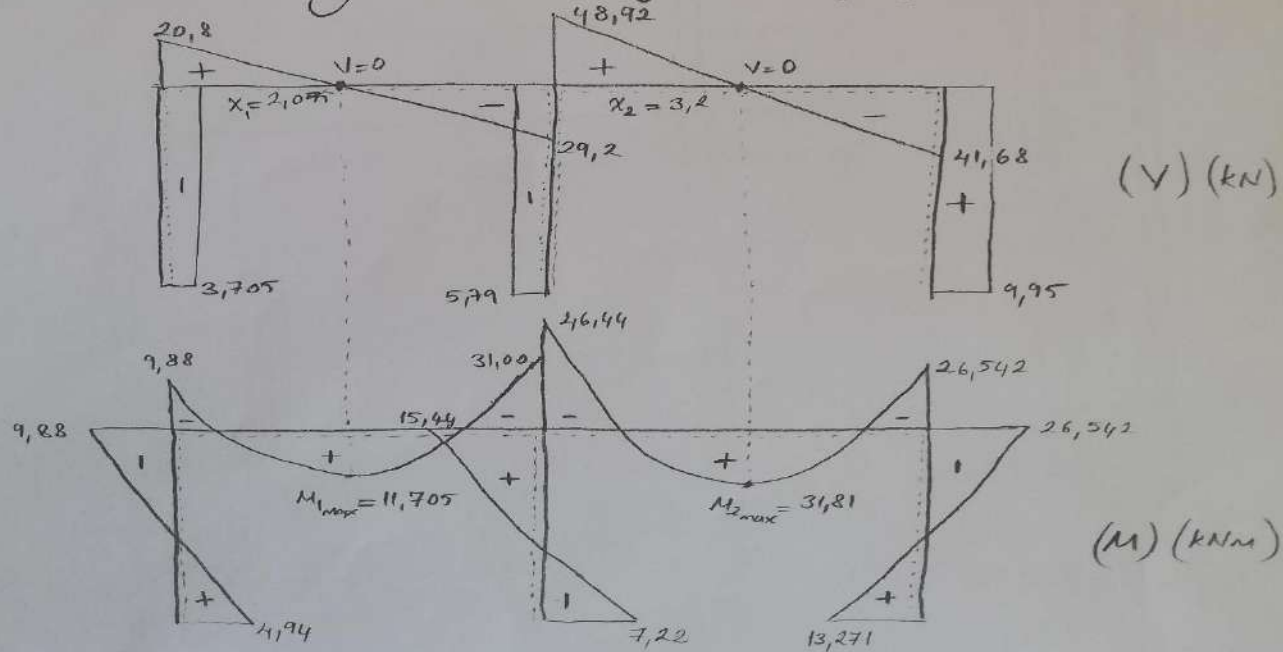
↳ M, N, T için pozitif yön kabulü $\Rightarrow$



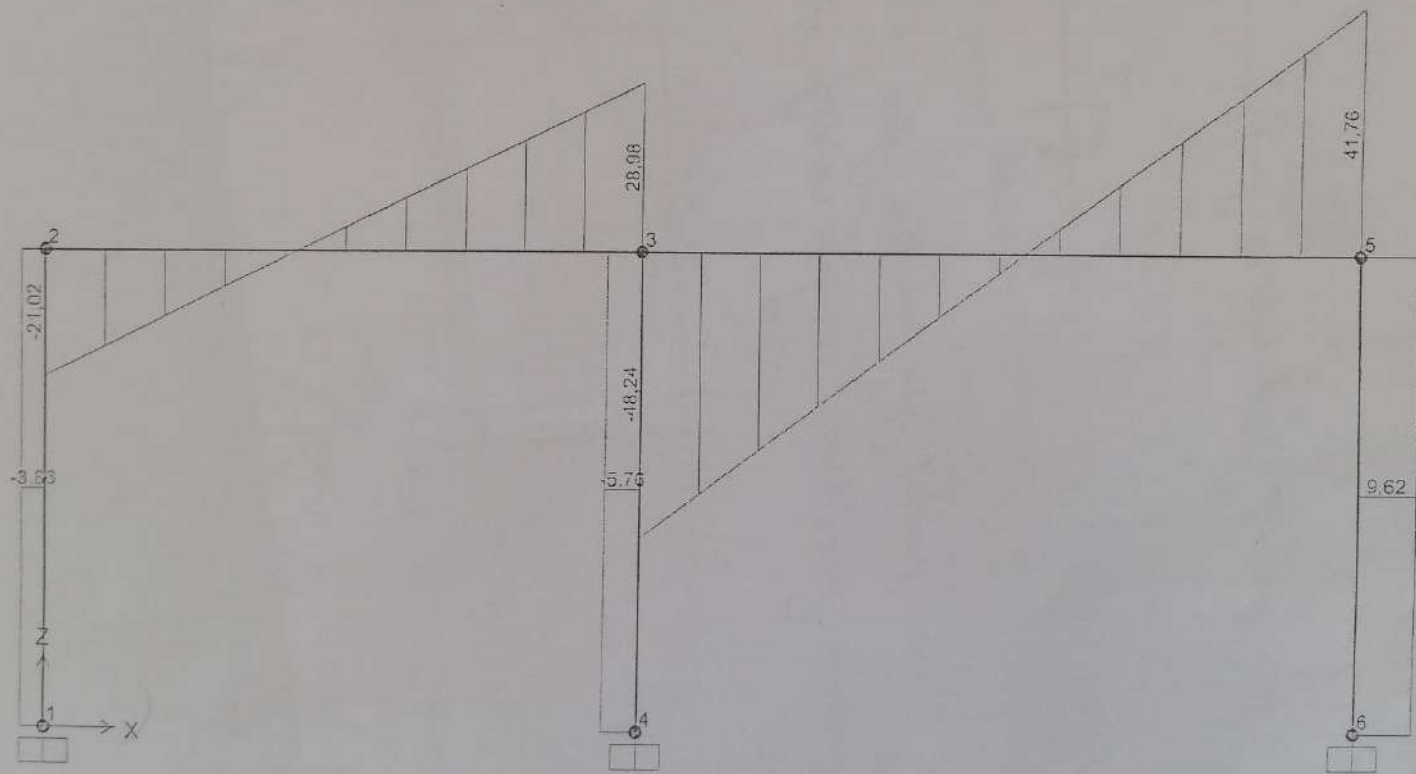
↳ Cross Yöntemi için " " " $\Rightarrow$



(*)(*) M, N, T için pozitif yön kabulüne göre örnekte verilen
çerçeve sistemin grafiklerini aşağıda verildiği gibi dikkate alınız..!



KESME Diyagramı



3D SAP2000 v16.0.0 Ultimate - cross_section_001.m

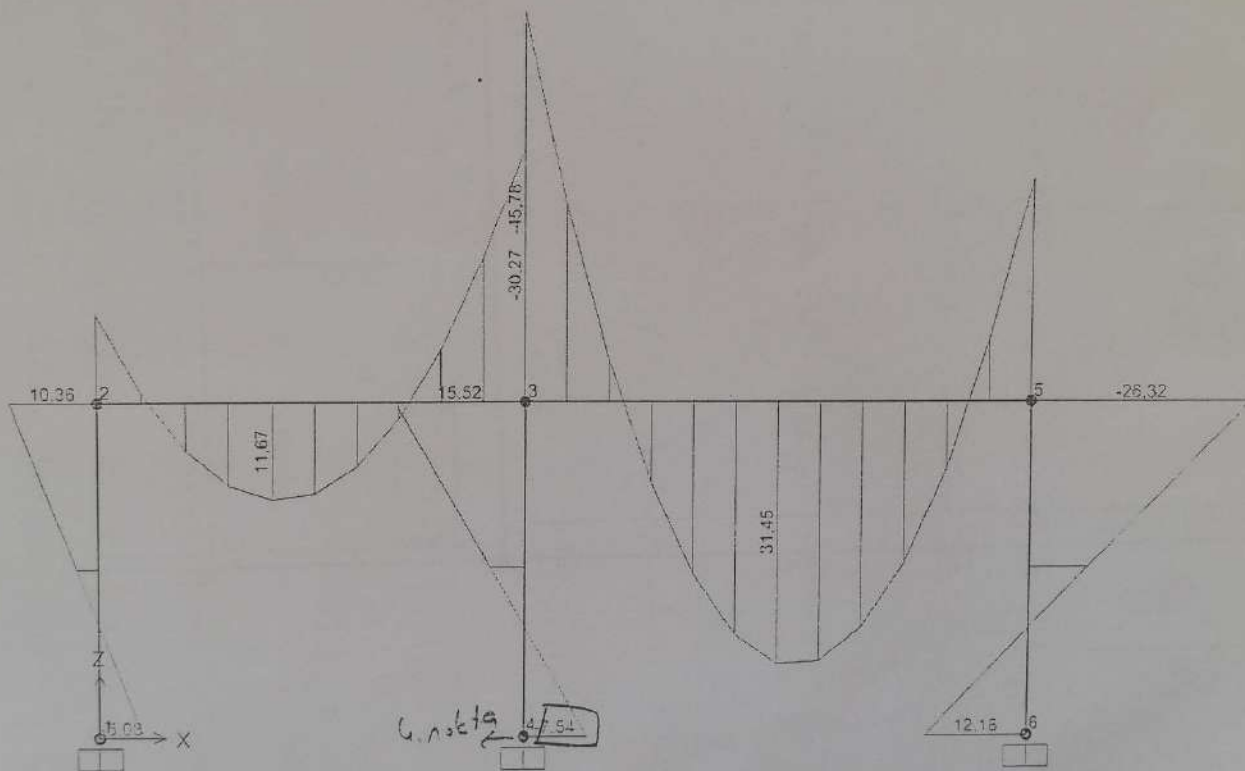
File Edit View Define Show Select Assign Analyze Display Design Options Tools Help

Shear Force 2/2 Diagram (DEAD)

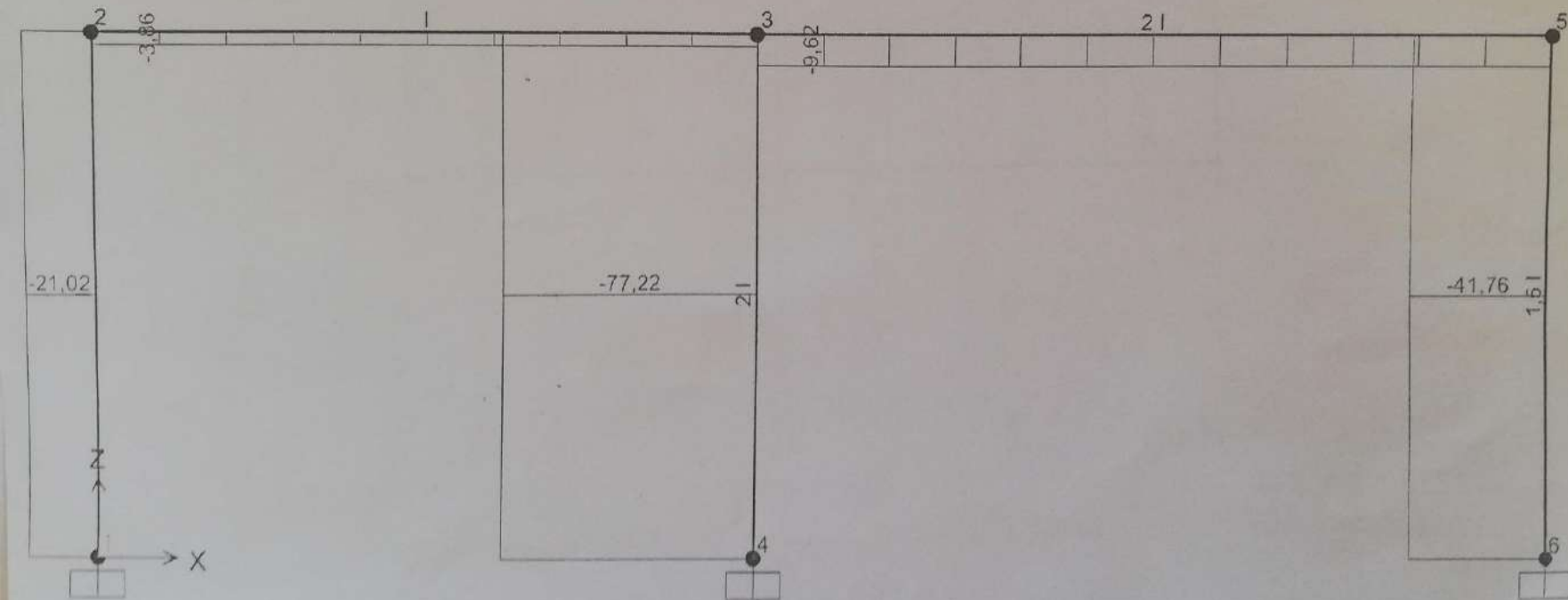
Right Click on any Frame Element for Detailed Design

GLOBAL 20 = 0

Moment 3-3 Diagram (DEAD)



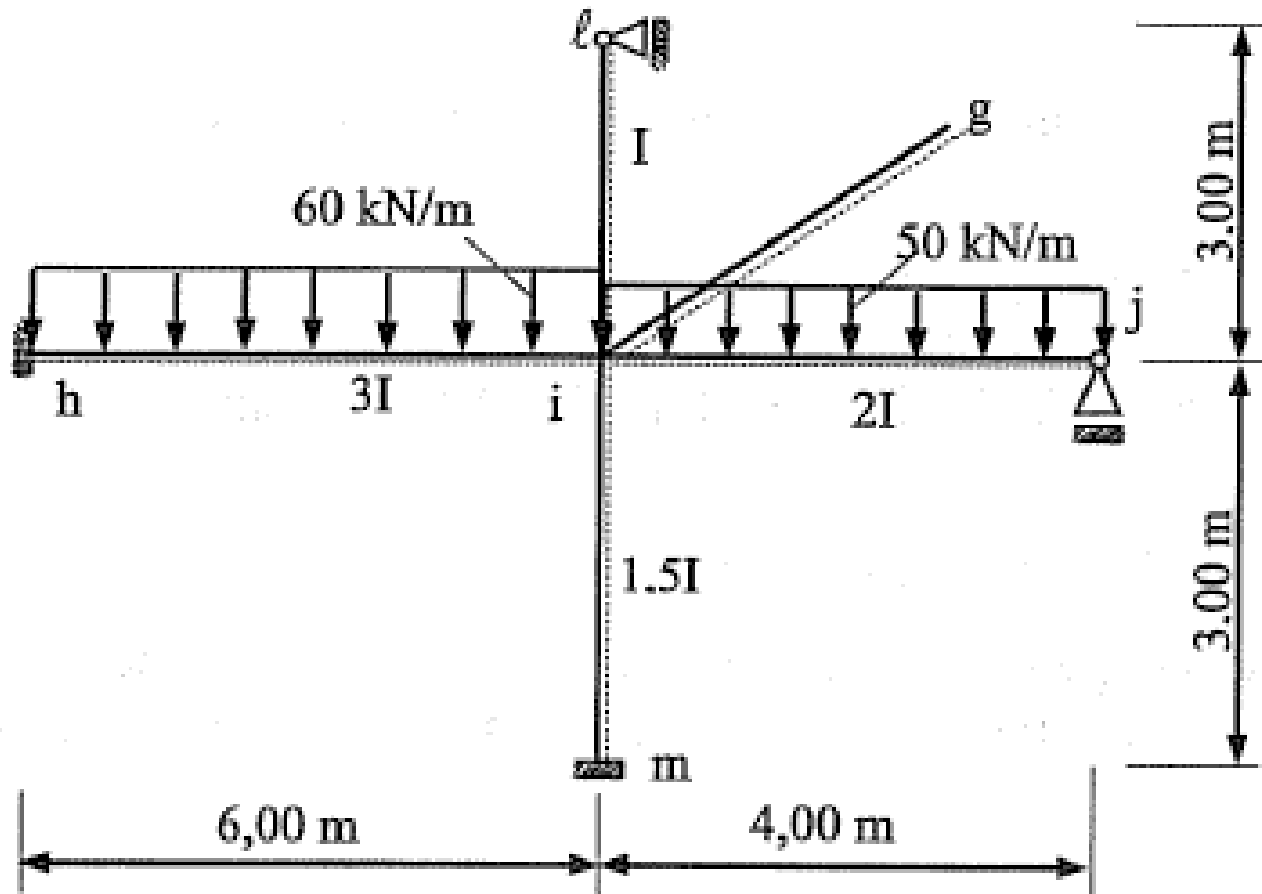
MOMENT DISTRIBUTION



NOEVAL KUV. D.YAGRAMI

2. Hiperstatik Sistemler

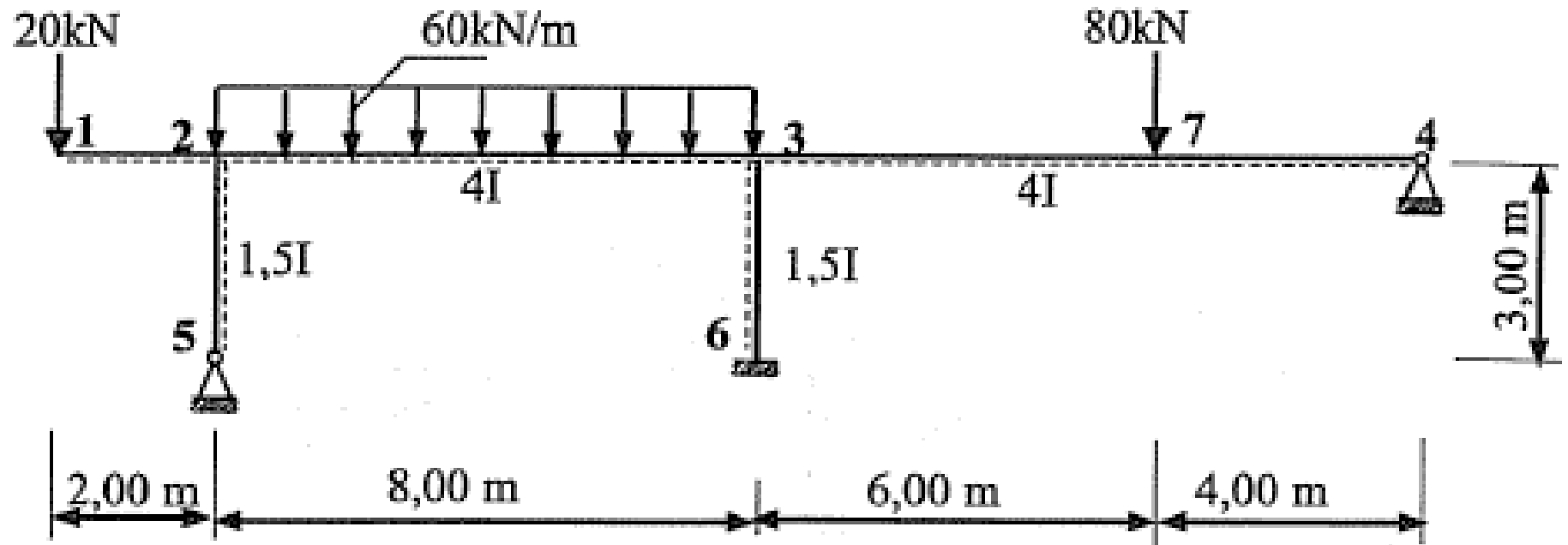
Örnek 2.5.2



Şekil 2.5.22

Şekil 2.5.16'da boyutları ve yükleme durumu verilen sistemde kesit tesirlerini hesaplayınız ve diyagramlarını çiziniz.

Örnek 2.5.3



Şekil 2.5.27

Şekil 2.5.27 de yükleme durumu ve boyutları verilen sistemde

- Kesit tesirlerini hesaplayınız ve diyagramlarını çiziniz.
- 2 ve 3 noktalarındaki dönme açılarını hesaplayınız.