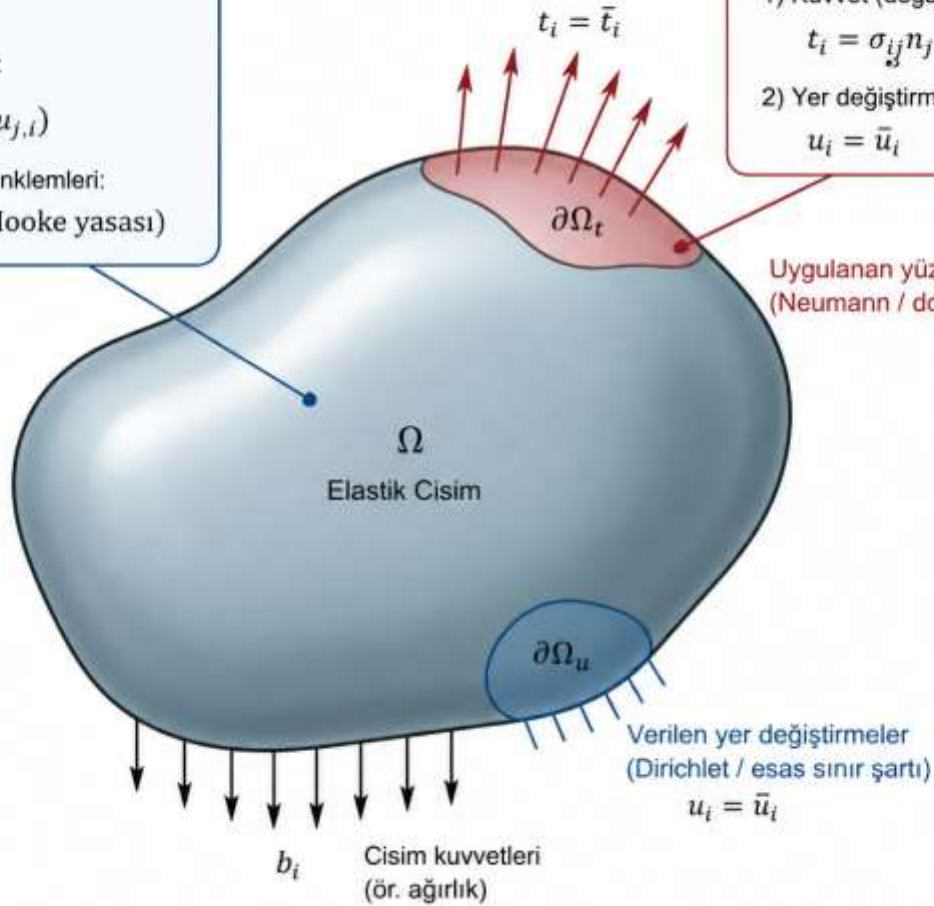


ELASTİSİTE TEORİSİ

Doç.Dr. Müslüm Murat Maraş

FORMULASYON
ve
ÇÖZÜM STRATEJİLERİ

- Önceki ünitelerde elastisite teorisinin temel alan denklemleri oluşturulmuştu.
- Bu alan denklemleri, inceleme altındaki cismin içindeki her noktada gerilme, gerinme ve yer değiştirmeler arasında diferansiyel ve cebirsel sistem denklemlerini oluşturur.
- Bu ünite, alan denklemleri ile kullanılmaya uygun *olan sınır şartları* oluşturulacaktır.
- Sınır şartları, cismin sınırında olan fiziki olayları ve iç gerilme, gerinme ve yer değiştirmeleri oluşturan yükleme verilerini belirtmektedir.
- Her problem için alan denklemleri aynı olmasına rağmen sınır şartları farklı olmaktadır.
- Sınır şartlarının doğru olarak belirlenmesi problem çözümü için çok önemlidir.



Alan Denklemlerinin Tekrarı

- İndeks notasyonunda;

Gerinme-yer değiştirme bağıntıları:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Uygunluk bağıntıları:

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0$$

Denge bağıntıları:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

Elastik bünye kanunu:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

σ_{ij} : Gerilme tensörü

e_{ij} : Gerinme tensörü

e_{kk} : hacimsel gerinme (iz düşüm/toplam gerinme)

δ_{ij} : Kronecker delta (i=j ise 1, değilse 0)

λ, μ : Lamé sabitleri

Verilen ifadeler, elastisite teorisinde **izotrop lineer elastik malzeme için bünye (malzeme) kanunu**, yani **Hooke Yasası**'dır.

- Uygunluk bağıntıları yer değiştirmelerin sürekli ve tek değerli olmasını sağlar ve gerilmeler rastgele belirlendiğinde gerekmektedir.
- Elastisite teorisinde, genel sistem denklemleri oluşturulduğunda uygunluk denklemleri bir tarafa bırakılır. Sadece gerilmeye bağlı denklemler oluşturulduğunda kullanılır.
- Sonuç olarak elastisite alan denklemlerinin genel sistemi önceki slaytta gösterilen 15 adet denkleme işaret eder. Tüm sistem index notasyonunda yazıldığında;
- **Tam denklem sistemi**

$$\mathcal{J}\{u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}; \lambda, \mu, F_i\} = 0$$

6 gerinme bağıntısı (şekil değiştirme ilişkisi)
 6 gerilme–gerinme bağıntısı (Hooke kanunu)
 3 denge denklemleri (kuvvet dengesi)

$u_i \rightarrow$ Yer değiştirmeler (x, y, z yönlerinde hareket)
 $e_{ij} \rightarrow$ Gerilmeler (şekil değişimleri)
 $\sigma_{ij} \rightarrow$ Gerilmeler (iç kuvvetler)
 $\lambda, \mu \rightarrow$ Lamé sabitleri (malzeme özellikleri)
 $F_i \rightarrow$ Hacim kuvvetleri (örneğin yerçekimi)

- Bu sistem 3 yer değiştirme u_i , 6 gerinme e_{ij} ve 6 gerilme σ_{ij} olmak üzere 15 bilinmeyen içerir.
- Denklemden noktalı virgülden sonraki terimler sistemin ayrıca iki elastik malzeme sabiti (izotropik malzemeler için) ve cisim kuvvet yoğunluğuna da bağlı olduğunu gösterir. Bu terimler problem formülasyonu ile önceden verilmelidir.
- Denklem sayısı, bilinmeyenler sayısı ile eşittir.
- Fakat bu tür karışıklıktaki bu genel denklem sisteminin analitik metodlar ile çözümü esasen mümkün olmadığından daha fazla basitleştirmeler yapılması gerekmektedir.

3 normal gerinme $\rightarrow e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}$

3 kayma gerinmesi $\rightarrow e_{xy}, e_{xz}, e_{yz}$

u_x, u_y, u_z (ya da indeksle u_i)

Toplam: 6 bilinmeyen

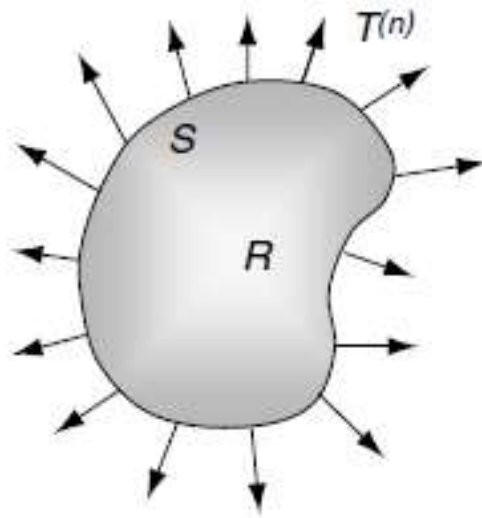
$$3(u_i) + 6(e_{ij}) + 6(\sigma_{ij}) = 15$$

3 normal gerilme $\rightarrow \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$

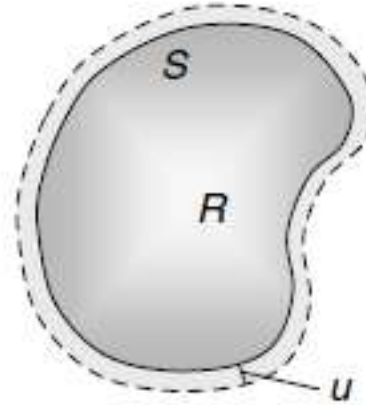
3 kayma gerilmesi $\rightarrow \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$

Toplam: 6 bilinmeyen

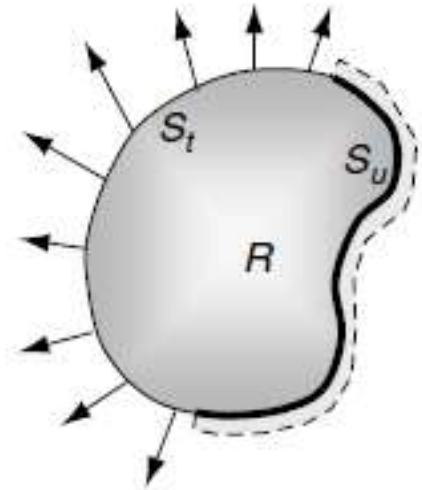
- **Sınır Şartları ve Temel Problem Sınıflandırması**
- Diğer Mühendislik bilimlerine (akışkanlar mekaniği, ısı iletimi ve yayımı, elektromanyetik) benzer şekilde yukarıda verilen denklem sisteminin çözümü incelenen cisimde uygun sınır şartları gerektirir.
- Elastisite uygulamaları için yaygın sınır şart tipleri normalde cismin nasıl mesnetlenme ve yükleme özelliklerini içerir.
- Bu kavram, yer değiştirmelerin ve yüzey kuvvetlerinin sınır noktalarında belirlenmesi ile matematiksel olarak formüle edilir.
- Bu genel fikir, yüzey kuvvetleri, yer değiştirme ve karma olarak 3 durum için Şekil 5-1’de gösterilmiştir.
- Yüzey kuvvetleri S_t sınırında, yer değiştirmeler S_u sınırında belirtilmiş olup toplam sınır $S = S_t + S_u$



Traction Conditions



Displacement Conditions



Mixed Conditions

FIGURE 5-1 *Typical boundary conditions.*

- İç bölgede (R) → denklemler çözülür
- Sınırda (S) → ne verildiği belirlenir
- S_t → kuvvet (gerilme) verilen kısım
- S_u → yer değiştirme verilen kısım

$$S = S_t + S_u$$

- Sınır şartlarının değişik tipleri de oluşabilir.
- Aynı sınır noktasında, hem yer değiştirme ve hem de kuvvetlerin belirtilmesi genelde mümkün olmamasına rağmen yer değiştirmenin bir kısmı ile kuvvetlerin bir kısmının belirtilmesi mümkündür.
- Bu tip karma durum, iki farklı dik yönde kuvvet ve yer değiştirmenin belirtilmesini içerir.
- Buna yaygın olarak Şekil 5-2’de gösterilen örnek, simetri yüzeyinde sıfır yer değiştirme ve sıfır teğet kuvveti içeren durumdur.
- Bu örnekte cisim simetri doğrusundan bölünerek yeni sınır yüzeyi ve oluşturulmuş ve analiz için küçük bir bölge elde edilmiştir.

1. Normal yönde yer değiştirme sıfır

$$u_n = 0$$

Yani:

- Simetri düzlemini geçemez
- Diğer tarafa "taşamaz"

2. Teğetsel gerilme sıfır

$$T_t = 0$$

Yani:

- Kayma (sürtünme benzeri etki) yok
- Yüzey kayabilir ama zorlanmaz

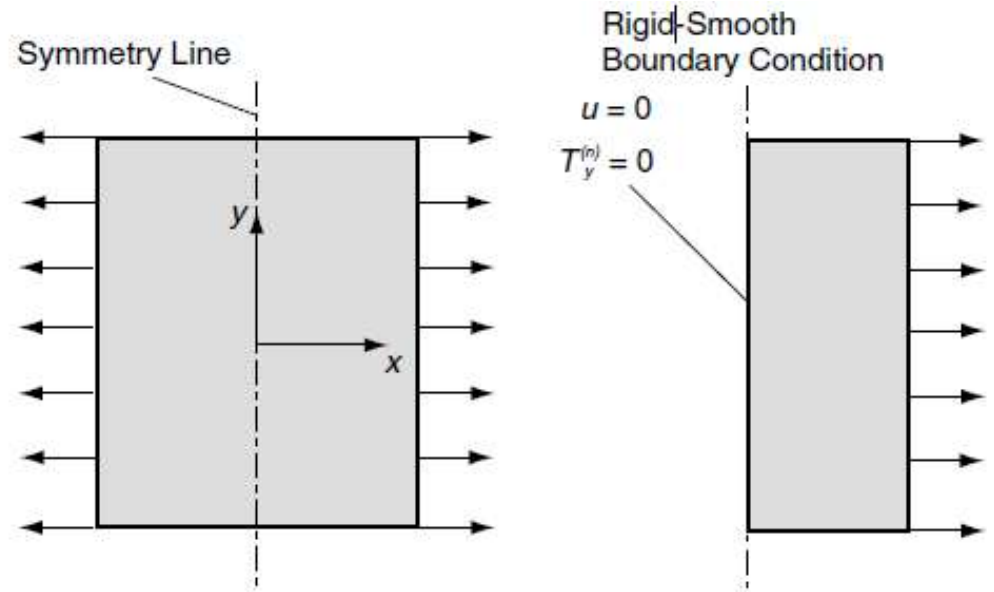
4. Şekildeki ifade

Sağdaki şekilde yazıyor:

- $u = 0 \rightarrow$ normal yer değiştirme yok
- $T_y^{(n)} = 0 \rightarrow$ teğetsel kuvvet yok

Bu durum:

"Rigid-Smooth Boundary" (rijit-düzgün yüzey) olarak da adlandırılır



Line of symmetry boundary condition.

5. En önemli mantık

Simetri yüzeyi:

- Gerçek fiziksel yüzey değildir
- Ama öyle davranmak zorundayız

Bu yüzden:

- Geçiş yok $\rightarrow u_n = 0$
- Sürtünme yok $\rightarrow T_t = 0$

- Sınır şartları problemi tanımlayan koordinat sistemi kullanılarak belirlenir ve sonra belirli yer değiştirme ve kuvvet bileşenleri belirlenen değerlere eşitlenir.
- Yer değiştirme durumu için bu tür bir tanımlama açıktır ve yer değiştirmelerin sıfır olduğu ankastre sınırlar yaygın bir örnek olarak verilebilir.
- Kuvvet durumu için tanımlama biraz daha karmaşıktır.
- Sınırların kartezyen koordinat veya kutupsal koordinat sistemlere denk geldiği belirli durumlar Şekil 5-3' de gösterilmiştir.
- Kuvvet tanımlaması gerilme tanımlamasına indirgenebilir.

◆ 2. Kartezyen koordinat (sol şekil)

Koordinatlar: $x - y$

Bir yüzeye gelen gerilmeler:

✓ Normal gerilmeler

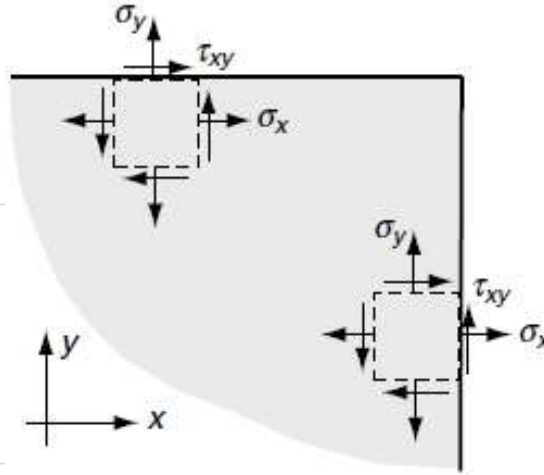
- $\sigma_x \rightarrow x$ yönünde (yüzeye dik)
- $\sigma_y \rightarrow y$ yönünde

👉 Yüzeye dik $\rightarrow$ çekme/basma

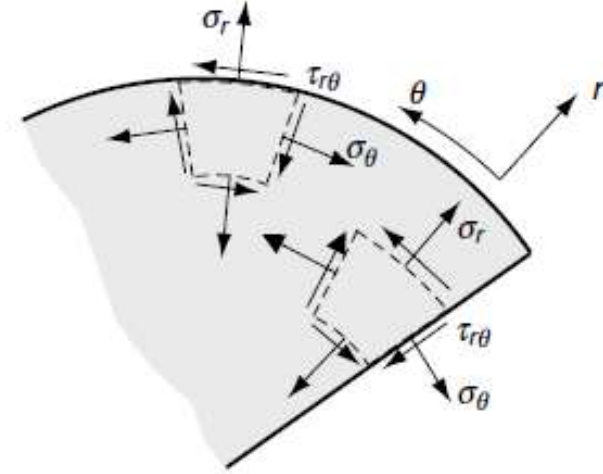
✓ Kayma gerilmesi

- τ_{xy}

👉 Yüzeye paralel $\rightarrow$ kayma etkisi



(Cartesian Coordinate Boundaries)



(Polar Coordinate Boundaries)

🔑 Önemli kural

Bir yüzeye etkiyen gerilme:

👉 1 normal + 1 kayma bileşeninden oluşur

◆ 3. Polar koordinat (sağ şekil)

Koordinatlar: $r - \theta$

Aynı mantık ama farklı eksenler:

✓ Normal gerilmeler

- $\sigma_r \rightarrow$ radyal yön
- $\sigma_\theta \rightarrow$ çevresel yön

- Kartezyen koordinat siteminde, y-yüzeyi için; normal gerilme σ_y , teğet gerilme ise τ_{xy} ve σ_x gerilmesi sadece alan içerisinde var olmaktadır
- Benzer şekilde x-yüzeyi için; normal gerilme σ_x , teğet gerilme ise τ_{xy} ve σ_y gerilmesi sadece alan içerisinde var olmaktadır.
- Aynı durum polar koordinat sistemi içinde geçerlidir.
- Şekil 5-3'de gösterildiği gibi, sınır boyunca uygun element çizimi söz konusu yüzeye etkiyen belirli gerilme bileşenlerinin açık şekilde görülmesini sağlar.
- Bu tür çizimler ayrıca sınır gerilmelerinin pozitif yönlerinin belirlenmesini de sağlar ve ayrıca belirli sınır yükleri ile uygun bir karşılaştırma içinde kullanışlıdır.

● (2) Traction Condition (Kuvvet uygulanmış yüzey)

Sağ yüzey:

$$T_x^{(n)} = \sigma_x = S, \quad T_y^{(n)} = \tau_{xy} = 0$$

Yani:

- Sadece **normal gerilme** var
- Kayma yok

✦ Saf çekme / basınç durumu

○ (3) Traction-Free (Serbest yüzey)

Alt yüzey:

$$T_x^{(n)} = \tau_{xy} = 0, \quad T_y^{(n)} = \sigma_y = 0$$

Yani:

- Hiç yük yok
- Tüm gerilmeler = 0

✦ Serbest yüzey

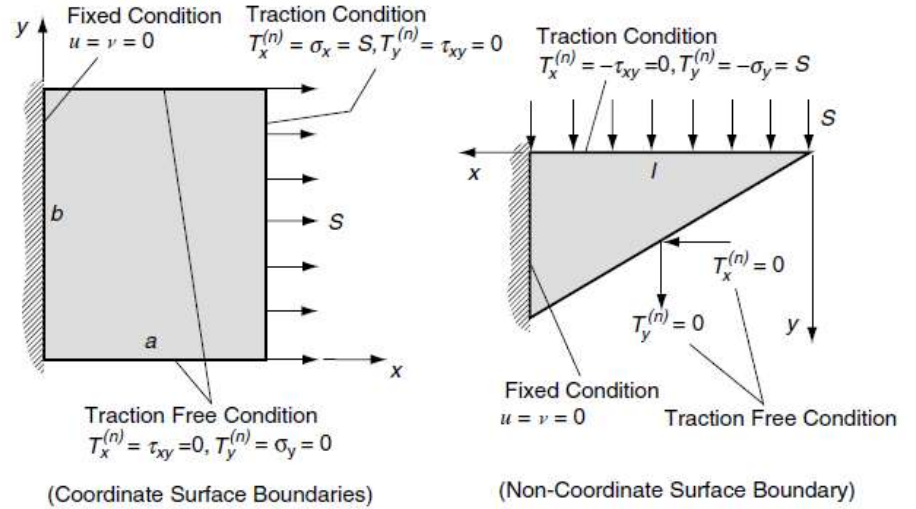


FIGURE 5-4 Example boundary conditions.

◆ 2. Sağ taraf → Koordinat olmayan (eğik yüzey)

Burada yüzey:

- x-y eksenine paralel değil
- ✦ Bu yüzden işler biraz değişiyor

● (1) Üst yüzey (yük uygulanmış)

$$T_x^{(n)} = -\tau_{xy} = 0, \quad T_y^{(n)} = -\sigma_y = S$$

- Dikdörtgen plak problem için dört sınır yüzeyi aynı zamanda koordinat yüzeyidir. Bu durum belirli sınır şartlarının tanımlanmasını kolaylaştırır.
- Sol kenardaki ankastre durum, $x=0$ yüzeyinde x ve y yer değiştirmelerin sıfır olmasını gerektirir. Bu tanımlama yüzey koordinat yüzeyi olmasa da değişmez.
- Diğer üç yüzeydeki kuvvetlerin tanımlaması basittir çünkü bu yüzeyler koordinat yüzeyleridir.
- İkinci örnekte ise eğimli yüzey koordinat yüzeyi değildir.
- Ankastre kenar ile üst yüzey koordinat yüzeyi olduğundan ilk örnekteki gibi aynı yöntem uygulanır ve şekilde gösterilmiştir.
- Fakat eğimli yüzeyde, yüzey gerilmeleri sıfır olur ve bu durum basitçe tek bir gerilme bileşeninin sıfır olması tanımı ile yapılamaz.

◆ 1. Bu neyi ifade ediyor?

👉 Bir yüzeye etkiyen gerilme vektörü (traction vector):

- $T^{(n)} \rightarrow$ yüzeye etkiyen toplam gerilme
- Bu vektörün:
 - x bileşeni $\rightarrow T_x^{(n)}$
 - y bileşeni $\rightarrow T_y^{(n)}$

◆ 2. n_x, n_y nedir?

👉 Yüzeyin normal vektörü bileşenleri

- $n_x \rightarrow$ x yönündeki normal bileşen
- $n_y \rightarrow$ y yönündeki normal bileşen

👉 Yani yüzeyin yönünü tanımlar

◆ 3. Denklem ne söylüyor?

👉 Yüzeye gelen gerilme:

Gerilme = Gerilme tensörü $\times$ normal vektör

Yani:

- σ_x ve τ_{xy} birleşerek x bileşeni oluşturur
- σ_y ve τ_{xy} birleşerek y bileşeni oluşturur

◆ 4. Neden = 0 ?

$$T_x^{(n)} = 0 \quad T_y^{(n)} = 0$$

👉 Bu şu anlama gelir:

- Eğimli yüzeyde her bir gerilme bileşeni sıfıra eşitlenir. Bu durumda;

$$T_x^{(n)} = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = 0$$

$$T_y^{(n)} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = 0$$

burada n_x ve n_y eğimli yüzey normalinin bileşenleridir.

- Bu daha genel tanımlama şeklidir ve x, y sistemindeki tek bir bileşenin hiçbirinin sıfır olmadığı açıkça not edilmelidir.
- Ayrıca bu problemde, eğik yüzeyin normalinin bileşenleri eğik yüzeydeki her noktada aynıdır.
- Fakat eğrisel yüzeylerde normal vektörü yüzeydeki konuma göre değişmektedir.

- Elastisite teorisindeki genel alan denklemlerinin çözümü ile ilgili üç temel sınır değer probleminin statik durum için sınıflandırılması ve formülasyonu yapılacaktır.

- ***Problem 1: Gerilme problemi***

Cismin yüzeyindeki kuvvetlerin dağılımı ve kütle kuvvetleri tanımlandığında dengedeki bir cismin içerisindeki gerilme, gerinme ve yer değiştirmelerin belirlenmesi,

$$T_i^{(n)}(x_i^{(s)}) = f_i(x_i^{(s)})$$

burada $x_i^{(s)}$ sınır noktalarını ve $f_i(x_i^{(s)})$ ise tanımlanan kuvvet/gerilme değerlerini gösterir.

$$T_i^{(n)}(x_i^{(s)}) = f_i(x_i^{(s)})$$

Sembol	Adı	Anlamı	Açıklama
$T_i^{(n)}$	Traction (yüzey gerilmesi)	Yüzeye etkiyen gerilme vektörünün i yönündeki bileşeni	İç gerilmelerin yüzeye yansıyan hali
i	İndeks	Yönü belirtir (x, y, z)	Hangi ekseninde olduğunu gösterir
(n)	Normal yön	Yüzeyin normaline bağlı olduğunu belirtir	Yüzeyin yönüne göre değişir
$x_i^{(s)}$	Yüzey noktası	Sınır üzerindeki konum	"s" → surface (yüzey)
$f_i(x_i^{(s)})$	Uygulanan kuvvet	Dış yükün i yönündeki bileşeni	Yüzeye uygulanan gerçek kuvvet
$T = f$	Sınır şartı	İç gerilme = dış yük	Elastisite probleminin temel sınır koşulu

Durum	Matematiksel ifade	Anlam
Serbest yüzey	$f_i = 0$	Yüzeyde kuvvet yok
Basınç yükü	$f_i = S \cdot n_i$	Yüzeye dik yük
Kayma yükü	$f_i \neq 0$ (teğetsel)	Yüzey boyunca kuvvet

- ***Problem 2: Yer değiştirme problemi***

Cismin yüzeyindeki yer değiştirmelerin dağılımını ve kütle kuvvetleri tanımlandığında dengeki bir cismin içerisindeki gerilme, gerinme ve yer değiştirmelerin belirlenmesi,

$$u_i(x_i^{(s)}) = g_i(x_i^{(s)})$$

burada $x_i^{(s)}$ sınır noktalarını ve $g_i(x_i^{(s)})$ ise tanımlanan kuvvet/gerilme değerlerini gösterir.

- ***Problem 3: Karma problem***

Kütle kuvvetleri ile cismin S_u yüzeyindeki yer değiştirmelerin dağılımını ve S_t yüzeyindeki kuvvet/gerilmelerin dağılımını tanımlandığında dengeki bir cismin içerisindeki gerilme, gerinme ve yer değiştirmelerin belirlenmesi,

$$u_i(x_i^{(s)}) = g_i(x_i^{(s)})$$

Sembol	Açılımı	Fiziksel Anlamı	Açıklama
u_i	Yer değiştirme bileşeni	Noktanın i yönündeki hareketi	x, y (veya z) yönünde
i	İndeks (x, y, z)	Yön bilgisi	2D: x,y — 3D: x,y,z
$x_i^{(s)}$	Yüzey noktası	Sınır üzerindeki konum	"s" → surface (yüzey)
$g_i(x_i^{(s)})$	Verilen yer değiştirme	Dışarıdan tanımlanan hareket	Bilinen fonksiyon
=	Eşitlik	Kısıt şartı	Yer değiştirme sabitlenir

Özel durumlar

Durum	Matematiksel ifade	Anlam
Sabit yüzey	$g_i = 0$	Hiç hareket yok (ankastre)
Belirli hareket	$g_i = \textit{sabit}$	Kontrollü yer değiştirme
Değişken hareket	$g_i(x)$	Noktaya göre değişen hareket

- Sadece kuvvet/gerilme sınır şartlı Problem 1'in tanımını temel alındığında temel denklem sistemi gerilme terimine bağlı olarak ifade edilir.

$$\mathcal{J}^{(t)}\{\sigma_{ij}; \lambda, \mu, F_i\}$$

- Benzer şekilde, sadece yer değiştirme sınır şartlı Problem 2'in tanımını temel alındığında temel denklem sistemi yer değiştirme terimine bağlı olarak ifade edilir.

$$\mathcal{J}^{(u)}\{u_i; \lambda, \mu, F_i\}$$

$$\mathcal{S}^{(t)}\{\sigma_{ij}; \lambda, \mu, F_i\}$$



Sembollerin Anlamları

Sembol	Açılımı	Fiziksel Anlamı	Açıklama
$\mathcal{S}^{(t)}$	Gerilme sistemi	Gerilme tabanlı denklem sistemi	Sadece σ ile çözüm yapılır
σ_{ij}	Gerilme tensörü	İç kuvvetler	Ana bilinmeyen
λ, μ	Lamé sabitleri	Malzeme özellikleri	Elastisite parametreleri
F_i	Hacim kuvvetleri	Dış kuvvetler (ör. yerçekimi)	Sisteme etki eder

Gerilme Formulasyonu

- Elastisitede ilk temel problem, sınır şartlarının sadece kuvvet veya gerilem cinsinden verilmesidir.
- Bunun için genel denklem sisteminin, yer değiştirme ve gerinme terimlerinin yokedilmesiyle sadece gerilmeler cinsinden formulüze edilmesi gerekmektedir.
- Yer değiştirmelerin yokedilmesiyle uygunluk denklemleri denklem sistemine dahil edilmelidir.
- Hooke kanunu kullanarak ve uygunluk denklemlerindeki gerinme terimleri yokedilerek;

$$\sigma_{ij, kk} + \sigma_{kk, ij} - \sigma_{ik, jk} - \sigma_{jk, ik} = \frac{\nu}{1 + \nu} (\sigma_{mm, kk} \delta_{ij} + \sigma_{mm, ij} \delta_{kk} - \sigma_{mm, jk} \delta_{ik} - \sigma_{mm, ik} \delta_{jk})$$

- $k=l$ kullanılarak 6 adet manalı denklem bulunabilir.
- Yukarıda verilen denklem gerilmeler cinsinden uygunluk denklem içermesine rağmen denge denklemlerinin dahil edilmesi ile daha kullanışlı bir denklem elde edilmiş olur.
- Buna göre;

$$\sigma_{ij, kk} + \frac{1}{1 + \nu} \sigma_{kk, ij} = \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma_{mm, kk} \delta_{ij} - F_{i, j} - F_{j, i}$$

- $i=j$ durumu için bu denklem $\sigma_{ii, kk} = -\frac{1 + \nu}{1 - \nu} F_{i, i}$ şekline dönüşür. Bu sonucu tekrar denklemden yerine koyduğumuzda;

$$\sigma_{ij, kk} + \frac{1}{1 + \nu} \sigma_{kk, ij} = -\frac{\nu}{1 - \nu} \delta_{ij} F_{k, k} - F_{i, j} - F_{j, i}$$

- Bu sonuç, gerilme cinsinden uygunluk bağıntılarıdır ve Beltrami-Mitchell uygunluk denklemleri olarak bilinir.

- Kütle kuvvetinin bulunmadığı durum için bu bağıntılar;

$$(1 + \nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

- Bu altı denklem ve gerçekte üç bağımsız sonucu ifade eder.
- Bu sonuçlar, 3 uygunluk denklemleri ile birleştirildiğinde 3-boyutlu durumda 6 adet gerilme bilinmeyenini bulmak için yeterli bağıntılar elde edilmiş olur.
- Bu denklem sistemi elastisite teorisi için gerilme formülasyonu oluşturur ve kuvvet/gerilme sınır durum problemler için uygundur.
- Gerilmeler elde edildikten sonra gerilme değerleri Hooke kanununda bulunabilir ve yer değiştirmeler $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ 'in integrali ile bulunabilir.
- Gerilme formülasyon denklem sistemleri nispeten karmaşık ve analitik çözümler gerilme fonksiyonlarının kullanımı ile belirlenir.
- Bu kavram, denge denklemlerini otomatik olarak sağlayan gerilmeleri ifade eder.

- İki boyutlu durum için bu kavramdüzlem gerilmeleri cimsinden tek bir fonksiyonu ifade eder.
- Bu ifade etme denge denklemini sağlar ve geriye kalan uygunluk denklemleri gerilme fonksiyonu cinsinden tek kısmi diferansiyel denklem (biharmonik denklem) oluşturur.
- Tek denklem düşürülmüş sistem çeşitli analitik metotlar kullanılarak çözülür.

Yer değiştirme Formulasyonu

- Alan denklemleri sadece yer değiştirmeler cinsinden oluşturulacaktır.
- Bu denklem sistemine yer değiştirme formulasyonu denir ve sınır durumu yalnız yer değiştirme olduğuunda çok kullanışlıdır.
- Denklem oluşturulması gerilme formulasyonuna göre daha kolaydır.
- Yer değiştirme formulasyonu için genel denklem sisteminden gerinme ve gerilme terimlerinin yokedilmesi gerekmektedir.
- Hooke kanunu kullanılarak bu işlem çok kolay olarak yapılabilir.

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$$

- Bu denklem açıldığında, 6 adet skaler denklem elde edilmiş olur.

$$\sigma_x = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_z = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Sembol	Açılımı	Fiziksel Anlamı
u, v, w	Yer değiştirmeler	x, y, z yönündeki hareket
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normal gerilmeler	Çekme / basma
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Kayma gerilmeleri	Kayma etkisi
λ	Lamé sabiti	Hacim değişimine direnç
μ	Kayma modülü (G)	Kaymaya direnç

- Bu bağıntılar denge denkleminde kullanıldığında;

$$\mu u_{i, kk} + (\lambda + \mu) u_{k, ki} + F_i = 0$$

- Yer değiştirmeler cinsinden denge denklemleri elde edilmiş olur ve bu denklemler *Navier* veya *Lame* denklemleri olarak adlandırılır.
- Bu sistem vektör formunda yazıldığında;

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{F} = 0$$

veya açıldığında 3 skaler denklem olarak

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_x = 0$$

$$\mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_y = 0$$

$$\mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_z = 0$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{F} = 0$$

Bu, senin gördüğün 3 denklemin **vektörel (kısa)** halidir.



Sembollerin Anlamları

Sembol	Açılımı	Fiziksel Anlamı
u, v, w	Yer değiştirmeler	x, y, z yönündeki hareket
∇^2	Laplace operatörü	yayılma / eğrilik
$\nabla \cdot \mathbf{u}$	Diverjans	hacim değişimi
λ	Lamé sabiti	hacimsel direnç
μ	Kayma modülü	şekil değişimine direnç
F_x, F_y, F_z	Hacim kuvvetleri	yerçekimi vb.

- Denklemden Laplace operatörü

$$\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2).$$

- *Navier* denklemleri, yer değiştirme problemleri için istenen formülasyonudur.
- Sistem, bilinmeyen 3 adet yer değiştirme bileşeni için 3 adet denklemi ifade eder.
- Gerilme formülasyonuna benzer şekilde yer değiştirme denklemlerinin çözümü zor olduğundan ek matematiksel teknikler uygulanarak problem çözümünde kullanılan denklemler sadeleştirilir.
- Bu sonuçların anlaşılmasına yardımcı olmak üzere Gerilme ve Yer değiştirme formülasyonlarının akış şemaları Şekil 5-5'te gösterilmiştir.

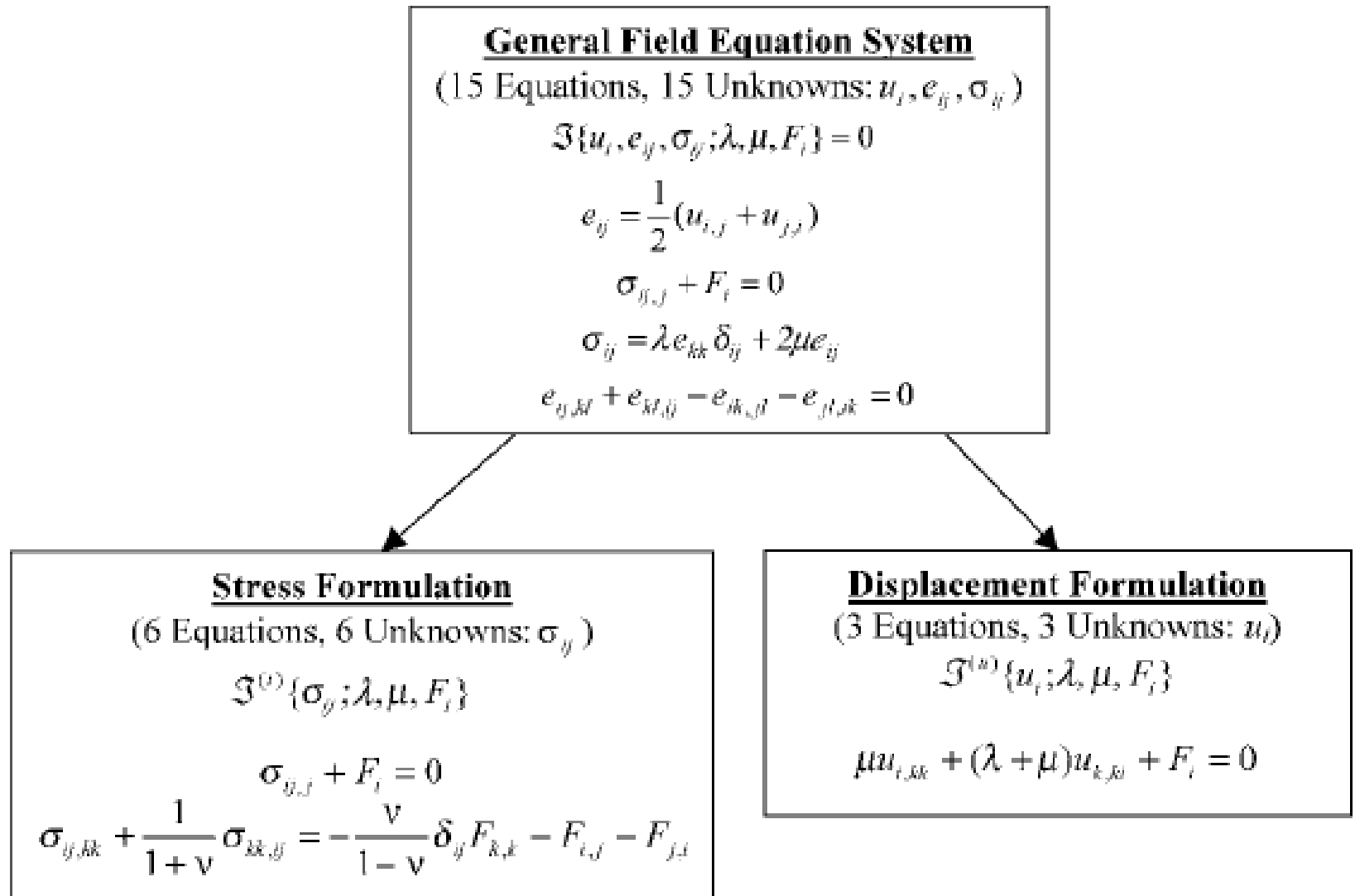


FIGURE 5-5 Schematic of elasticity field equations.

ELASTİSİTE ALAN DENKLEMLERİ SİSTEMİ

SEMBOLLERİN ANLAMLARI

- u_i : Yer değiştirme bileşenleri
($i=x,y,z$)
- e_{ij} : Gerilme bileşenleri (6 adet)
- σ_{ij} : Gerilme bileşenleri (6 adet)
- F_i : Birim hacim başına düşen kütle kuvvetleri (x,y,z)
- λ, μ : Lamé sabitleri
(malzeme özellikleri)
- δ_{ij} : Kronecker delta
($i=j$ ise 1, $i \neq j$ ise 0)
- $(\cdot, j)$: j yönüne göre türev

GENEL SİSTEM (15 Denklem, 15 Bilinmeyen)

Bilinmeyenler: u_i (3) , e_{ij} (6) , σ_{ij} (6) $\Rightarrow 3+6+6=15$



1) KİNEMATİK DENKLEMLER (3)

Yer değiştirme $\rightarrow$ Gerilme

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$



2) DENGİ DENKLEMLERİ (3)

Kuvvet dengesi

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$



3) MALZEME DENKLEMLERİ (6)

(Hooke Kanunu – Lineer Elastisite)

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$



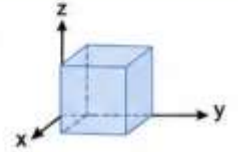
4) UYGUNLUK DENKLEMLERİ (3)

(Gerilme alanının sürekliliği ve fiziksel tutarlılığı)

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0$$

FİZİKSEL ANLAMI

- Kinematik denklemler geometrik ilişkileri verir.
- Denge denklemleri kuvvetlerin dengede olmasını sağlar.
- Malzeme denklemleri, malzemenin elastik davranışını tanımlar.
- Uygunluk denklemleri, gerilmelerin bir yer değiştirme alanından türetilmiş olabilmesi için şarttır.



1) GERİLME FORMÜLASYONU (STRESS FORMULATION)

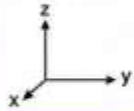
Sadece gerilmeler bilinmeyen alınır.

Bilinmeyenler: σ_{ij} (6 adet)

DENKLEMLER (6 adet)

1) Denge denklemleri (3)

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$



2) Uygunluk denklemleri (3)

Gerilmeler için türetilmiş
6 adet diferansiyel denklem
(örnek biçim)

$$(1+\nu)\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

(Benzer 5 denklem daha vardır.)

İLİŞKİLER

Gerilmeler bulunduğundan sonra:

- Gerilmeler: $e_{ij} = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \lambda e_{kk} \delta_{ij})$ (veya Hooke kanunu ile)
- Yer değiştirmeler: $e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ den entegre edilerek bulunur.

AYNI FİZİKSEL PROBLEM

Farklı bilinmeyen kümeleri seçilerek problem iki temel yaklaşımla çözülebilir.

- Sınır şartlarına göre yöntem seçilir.
- Her iki yöntem de aynı sonucu verir.
- Uygunluk şartları ya denklem olarak (yöntem 1) ya da otomatik olarak (yöntem 2) sağlanır.

SINIR ŞARTLARI

(Problem tanımına göre)

- Gerilme (traction) şartları
- Yer değiştirme şartları
- Karma (mixed) şartlar

2) YER DEĞİŞTİRME FORMÜLASYONU (DISPLACEMENT FORMULATION)

Sadece yer değiştirmeler bilinmeyen alınır.

Bilinmeyenler: u_i (3 adet)

DENKLEMLER (3 adet)

Navier (Alan) Denklemleri (3 denklem)

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + F_i = 0 \quad (i = x, y, z)$$

Açılımı:

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_x = 0$$

$$\mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_y = 0$$

$$\mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_z = 0$$

SONRASI İLİŞKİLER

Yer değiştirmeler bulunduğundan sonra:

1) Gerilmeler:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

2) Gerilmeler (Hooke):

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

NE ZAMAN KULLANILIR?

- Sınırdaki sadece gerilme (kuvvet) şartları verilmişse uygundur.
- Uygunluk denklemleri karmaşık olduğu için daha zordur.

NE ZAMAN KULLANILIR?

- Sınırdaki yer değiştirme şartları varsa en uygundur.
- Uygunluk şartları otomatik sağlanır, daha pratiktir ve yaygın kullanılır.

Superpozisyon Prensibi

- Birçok mühendislik probleminin çözümünde superpozisyon prensibi çok kullanışlı bir araçtır.
- Bu denklem sadece doğrusal denklemler ile çözülen sistemler uygulanabilir.
- Küçük deformasyon ve doğrusal elastik davranış varsayımı altında bütün elastisite alan denklemleri doğrusaldır.
- Superpozisyon Prensibi: Verilen bir problemde, $\{\sigma_{ij}^{(1)}, e_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}\}$ tanımlı kütle kuvveti $F_i^{(1)}$ ve yüzey kuvveti $T_i^{(1)}$ için temel elastisite denkleminin çözümü ve $\{\sigma_{ij}^{(2)}, e_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}\}$ tanımlı kütle kuvveti $F_i^{(2)}$ ve yüzey kuvveti $T_i^{(2)}$ için temel elastisite denkleminin çözümü ise $\{\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}, e_{ij}^{(1)} + e_{ij}^{(2)}, u_i^{(1)} + u_i^{(2)}\}$ tanımlı kütle kuvveti $F_i^{(1)} + F_i^{(2)}$ ve yüzey kuvveti $T_i^{(1)} + T_i^{(2)}$ için temel elastisite denkleminin çözümüdür.

- Bu prensibin uygulaması görmek için Şekil 5-6'da gösterilen kütle kuvveti bulunmayan 2-boyutlu duruma bakalım.
- İki eksenli karmaşık yükleme (1) + (2) durumunun çözümü basit iki çözümün toplamı olarak bulunabilir.
- Bu süperpozisyon prensibinin yaygın bir kullanımıdır.

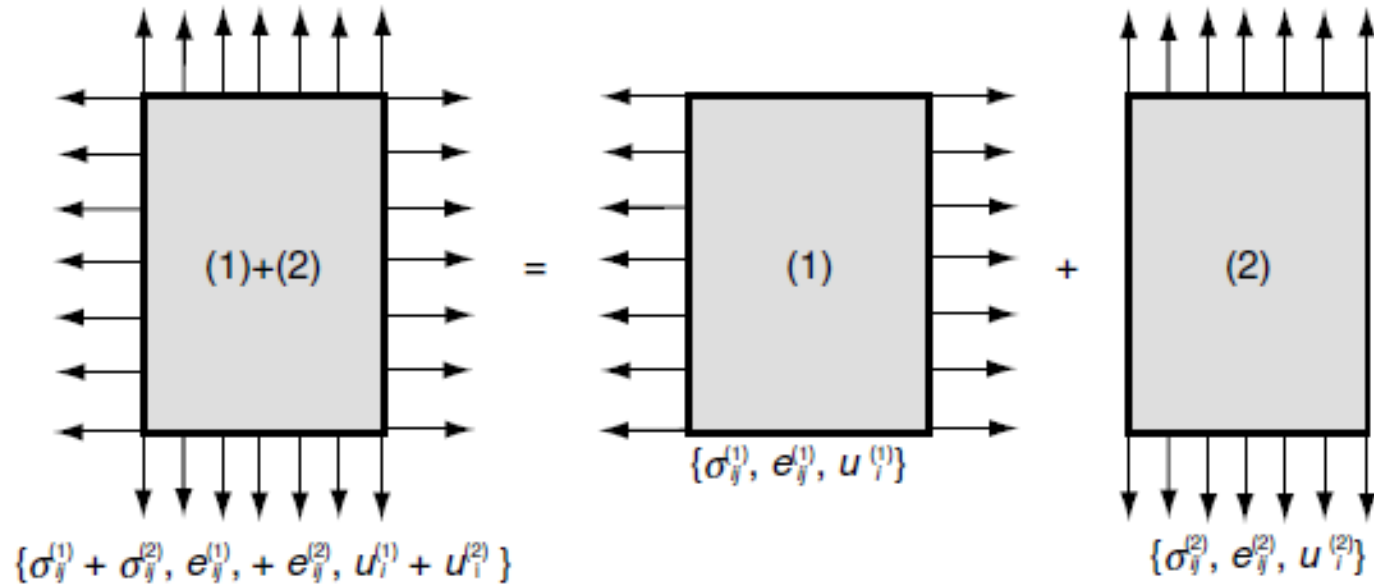


FIGURE 5-6 Two-dimensional superposition example.

Saint-Venant Prensibi

- Şekil 5-7’de gösterilen basınç yüklemesi altında bulunan üç özdeş dikdörtgen elemana bakalım.
- Herbir problemde uygulanan bileşke kuvvet (statik eşdeğer olarak) aynı olduğundan mesnet yakın bölgede gerilme, gerinme ve yer değiştirme değerleri aynı olması beklenir.

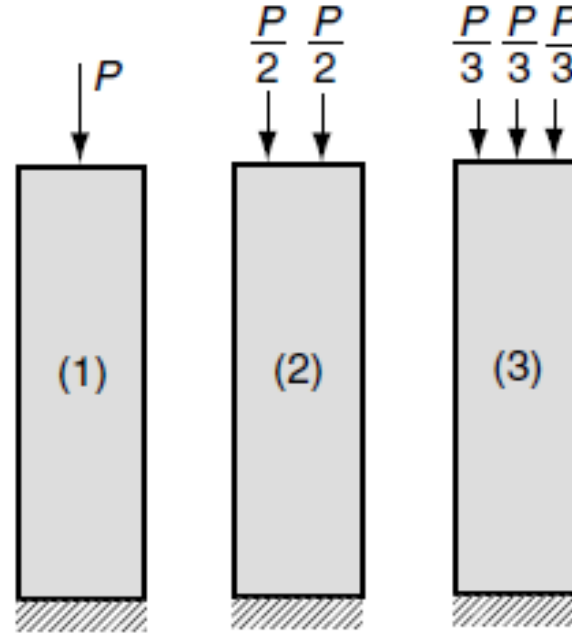


FIGURE 5-7 *Statically equivalent loadings.*

- Bu davranış, Şekil 5-8’de gösterilen S^* sınırı üzerinde herhangi bir $T^{(n)}$ yüklemesine sahip elastik bir cismi düşünelim.

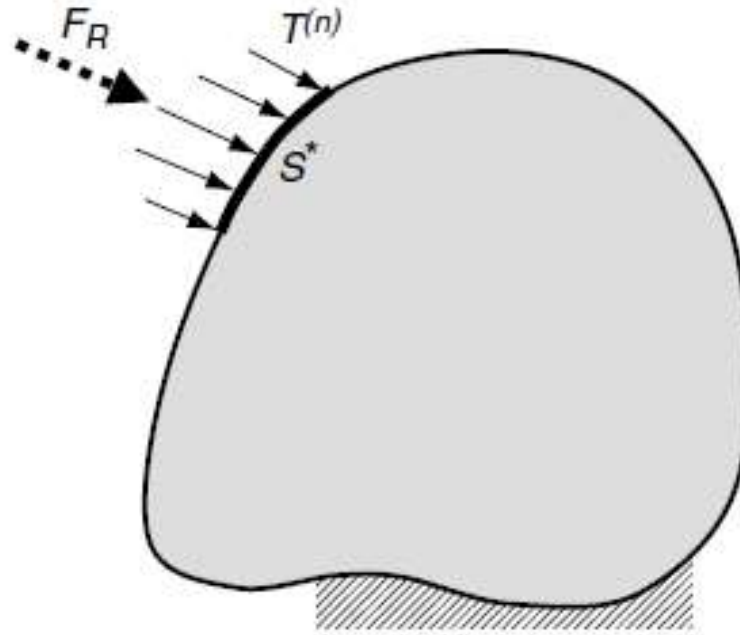


FIGURE 5-8 *Saint-Venant concept.*

- Belirli bir yükleme S^* sınır komşuluğunda detaylı ve duruma özel etkiler oluşturur.
- S^* sınırından uzaktaki noktalarda gerilmeler yüklemenin gerçek dağılımından ziyade bileşke kuvvet F_R 'a bağlıdır.
- Yükleme özel sınırda oluşan gerilme, gerinme ve yer değiştirme alanları sınırdan uzaklaştıkça yok olmaya başlamaktadır.
- Bu kavramalar Saint-Venant prensibini oluşturur ve şöylece ifade edilir;

Saint-Venant Prensibi: *Statikçe eşit iki farklı yük dağılımı ile oluşan gerilme, gerinme ve yer değiştirme alanları cismin yükleme noktalarından uzak kısımlarında yaklaşık olarak aynıdır.*

- Bu prensipte geçen uzakta ve yaklaşık olarak eşit niteliksel terimleri iki elastik alan arasındaki farkın sayısal tahminini sağlamaz.
- Çözüm, yükleme sınırından uzaktaki noktalarla sınırlandırıldığında Saint-Venant prensibi verilen sınır şartlarını statikçe eşit olan daha basit şartlara değiştirmeye izin verir ve çözümün sonucu değişmez.
- Sınır şartlarının basitleştirilmesi probleme analitik çözüm bulma şansımızı artırmaktadır.

Genel Çözüm Stratejileri

1. Direkt Method

- Bu yöntem alan denklemlerinin veya Şekil 5-5'te verilen gerilme ve/veya yer değiştirme formüllerinin direkt integrasyonu ile çözüm belirlenir.
- Sınır şartları kesinlikle sağlanmalıdır.
- Bu yöntem matematiksel zorluklarla karşı karşıya kaldığından geometrisi basit olan problemlerle çözümü sınırlıdır.

Örnek: Direkt İntegrasyon Örneği: Kendi Ağırlığı altında Çubuğun Uzaması

Şekil 5-9’da gösterilen prizmatik çubuk kendi ağırlığı altında uzamaktadır.

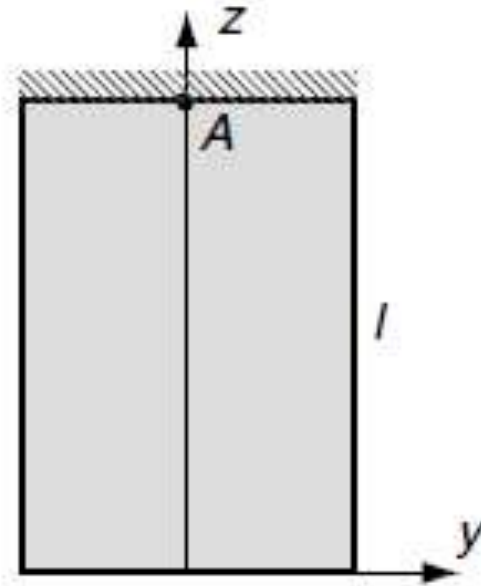


FIGURE 5-9 *Prismatic bar under self-weight.*

- Bu problemde kütle kuvvetleri $F_x = F_y = 0, F_z = -\rho g$, burada ρ malzeme yoğunluğu g ise yerçekimi ivmesidir.
- Alt kısmın ağırlığından dolayı her bir kesitte oluşan sabit yayılı çekme gerilmesi oluştuğunu kabul edelim. Bu gerilme dağılımı;

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

- Denge denklemleri;

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -F_z = \rho g$$

- Bu denklemin, $z=0$ 'da $\sigma_z=0$ sınır şartı ile integrali alındığında $\sigma_z(z) = \rho g z$ sonucu elde edilir. Hooke kanunu kullanılarak gerilmeler elde edilir.

$$e_z = \frac{\rho g z}{E}, \quad e_x = e_y = -\frac{\nu \rho g z}{E}$$

$$e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0$$

- Yer değiştirme değerleri, gerinme-yer değiştirme değerlerinin integrali ile elde edilebilir.
- Bu problemde sınır şartı ise Şekil 5-9'daki A noktasında ($x = y = 0$, $z = l$) sıfır yer değiştirme ve dönme olmasıdır.
- Gerinme değerleri;

$$u = -\frac{\nu \rho g x z}{E}, \quad v = -\frac{\nu \rho g y z}{E}$$

$$w = \frac{\rho g}{2E} [z^2 + \nu(x^2 + y^2) - l^2]$$

Ters Metod

- Bu metotta temel alan denklemlerini sağlayan belirli yer değiştirmeler veya gerilmeler seçilir.
- Sonra bu çözüm alanı ile çözülebilecek spesifik bir problemin belirlenmesi için arama yapılır.
- Problemdeki bütün şartları sağlayan çözümü oluşturabilecek uygun problem geometrisi, sınır şartları ve kütle kuvvetlerinin belirlenmesi anlamına gelir.
- Bu metodu kullanarak bazen belirli bir problem için çözümü bulmak zor olabilir.

Örnek: Ters Metot Örneği: Kiriş Eğilmesi

- Aşağıdaki gerilme alanı verilen sıfır kütle kuvvetli elastisite problemine bakalım.

$$\sigma_x = Ay, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

burada A bir sabittir. Bu basit doğrusal gerilme alanı denge ve uygunluk denklemleri sağlar ve bu alan elastisite probleminin çözümüdür.

- Soru bu gerilme alanı ile hangi problemin çözülebileceğidir.
- Bu soruyu cevaplamak için yaygın düşünce bazı deneme problemleri düşünmek ve verilen gerilme alanını kullanarak oluşabilecek sınır şartlarının gereklerini incelemektir.
- Şekil 5-10'da gösterilen 2-boyutlu dikdörtgen probleme bakalım

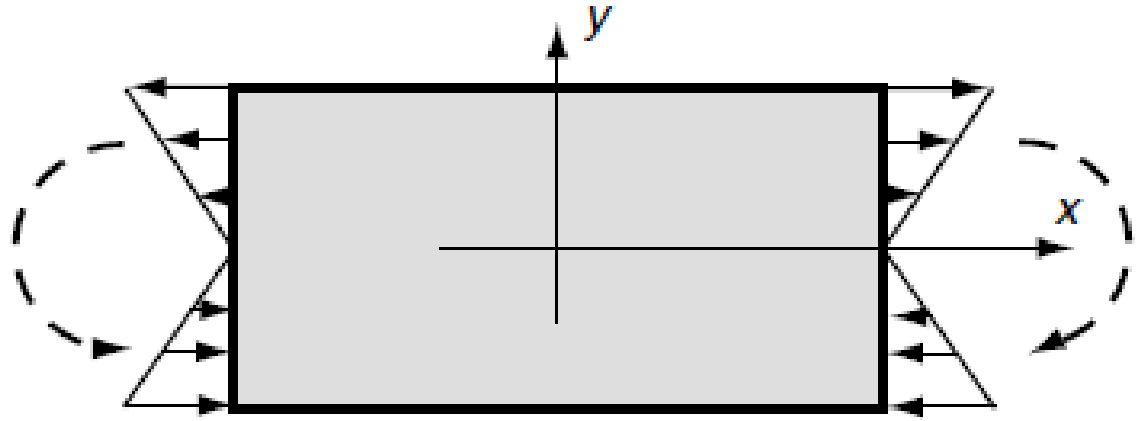


FIGURE 5-10 *Pure bending problem.*

- Her sınır yüzündeki gerilmeler, üst ve alt bölgede toplamda sıfır yüklemeyi ve sağ ve sol taraftaki doğrusal normal gerilme dağılımı oluşturur.
- Bu çeşit yükleme basit eğilme problemini oluşturur ve sağ ve sol taraftaki yüklemeler net kuvvet oluşturmadan sadece basit eğilme momenti oluşturur.

Yarım Ters Metodu

- Bu metotta yer değiştirme ve/veya gerilme alanı belirtilir ve geriye kalan bilinmeyenler temel alan denklemleri (genellikle direkt integral ile) ve sınır şartları ile belirlenir.
- Uygun yer değiştirme ve/veya gerilme çözüm alanlarının kurulması yaklaşık mukavemet teorisi öncülüğünde kurulabilir.
- Bu yaklaşımın kullanışlılığı Saint-Venant prensibi ile daha ha iyileştirilir.
- Bu prensiple karmaşık sınır şartları statikçe eşdeğer basit dağılım ile değiştirilebilir.

Örnek 5-2: Yarı Ters Metot: Prizmatik çubukların Burulması

- Aşağıda verilen yer değiştirme alanı burulma problemi için verilmiştir.

$$u = -\alpha yz, \quad v = \alpha xz, \quad w = w(x, y)$$

burada α sabittir. Bu problemde, yer değiştirme bileşenleri olarak x ve y olarak seçilir ve z bileşeni seçilen bu bileşenlerin fonksiyonu olarak belirlenir.

- Gerinme- yer değiştirme bağıntıları ve Hooke kanunu kullanılarak gerilme alanı;

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \right)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x \right)$$

- Bu gerilmeler, denge denklemlerinde kullanıldığında;

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

- Elde edilen aslında denklem bu durum için Navier denklemdir.
- Bu sonuç, tahmin edilen çözüm formunun bilinmeyen kısmını belirlemek için tek denklemi (Laplace denklemi) gösterir.
- Çözümün bir kısmının tahmin edilmesi geriye kalan çözülmesi gereken denklemleri büyük oranda basitleştirir.
- Belirli bir problemin çözümünü tamamlamak için x,y düzlemindeki tanım aralığı ile uygun sınır şartları gerekmektedir.