

ELASTİSİTE TEORİSİ

Doç.Dr. Müslüm Murat Maraş

Gerinme Enerjisi ve Prensipieri

- Sınır kuvvetleri/gerilmeleri ve kütle kuvvetleri elastik cisim üzerinde iş yapar ve bu iş malzeme içerisinde gerinme enerjisi formunda tutulur.
- Elastik durum için bu yüklemelerin kaldırılması ile kütle içerisinde tutulan enerji tamamen boşaltılır.
- Gerinme enerjisinin kullanımı diğer yöntemlerle elde edilemeyen yeni kullanışlı bilgiler elde edilir.
- Bu yöntemler daha önce elde edilen alan denklemlerinin yerine düşünülebilir.
- Yapı mekaniğinde çubuklar, kirişler, plaklar ve kabuklar içeren problemler için bünye denklemlerinin ve ilgili sınır şartlarının oluşturulmasında çok kullanışlı olduğu ispatlanmıştır.
- Bu yöntemler elastisite problemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmaya da bir yöntem sağlamış olmaktadır.

Gerinme Enerjisi

- Elastik cisim üzerinde yüzey ve kütle kuvvetleri tarafından iş cisim içerisinde gerinme enerjisi formunda tutulur.
- İdeal bir elastik cisim için bu tutulan enerji
- **Gerinme Enerjisi (Strain Energy)**, bir malzemenin elastik sınırlar içinde yük altında şekil değiştirmesi sırasında depoladığı enerjidir. Yük kaldırıldığında bu enerji geri kazanılır.

Birim hacim başına gerinme enerjisi:

$$u = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$$

Burada;

- u : Birim hacim başına gerinme enerjisi (J/m³)
- σ : Gerilme (Pa)
- ϵ : Birim şekil değiştirme

Hooke Kanunu Kullanılırsa

$$\sigma = E \epsilon$$

olduğundan,

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E \epsilon^2}{2}$$

Toplam Gerinme Enerjisi

Bir elemanın hacmi V ise:

$$U = uV$$

veya

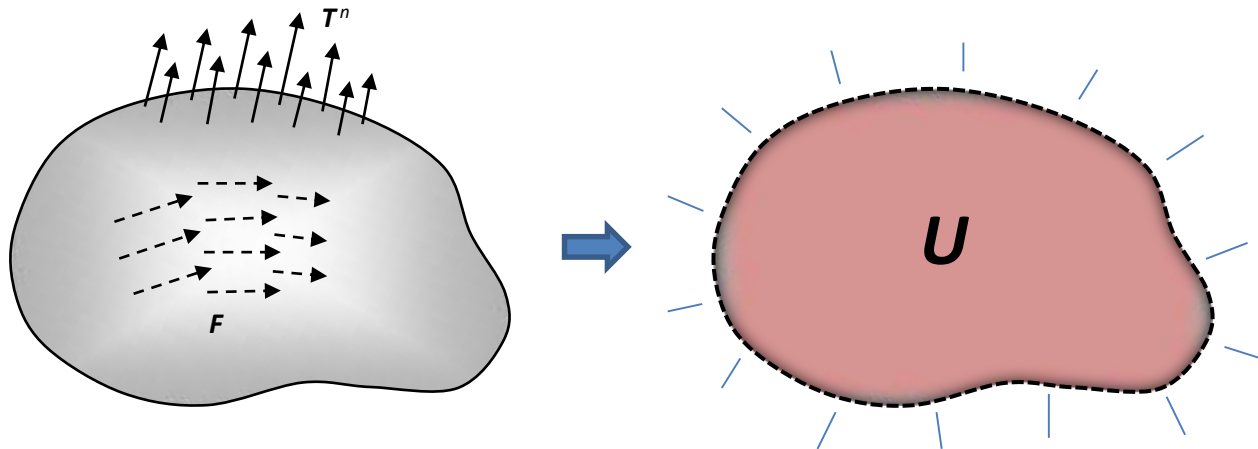
$$U = \frac{1}{2} P \delta$$

Burada;

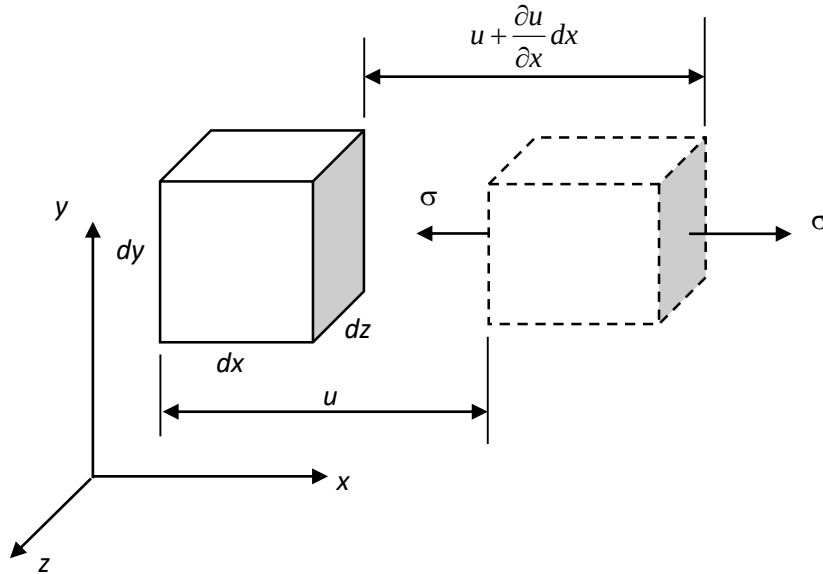
- U : Toplam gerinme enerjisi (J)
- P : Uygulanan yük (N)
- δ : Uzama veya yer değiştirme (m)

Strain Energy and Related Principles

"Elastik katılara etki eden yüzey kuvvetleri ve hacim kuvvetleri tarafından yapılan iş, cisim içerisinde gerinme enerjisi (şekil değiştirme enerjisi) şeklinde depolanır."



Uniaxial Extensional Deformation



U

Gerinme enerjisi yoğunluğu (birim hacimde depolanan enerji)

dU

Diferansiyel gerinme enerjisi

$dx dy dz$

Diferansiyel hacim elemanı (dV)

σ_x

x yönündeki normal gerilme

ϵ_x

x yönündeki normal birim şekil değiştirme

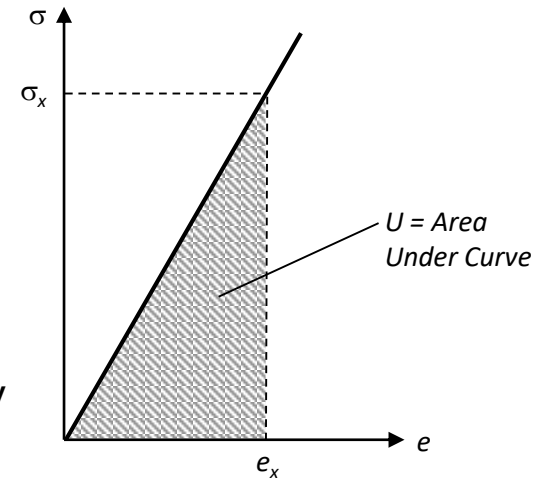
E

Elastisite (Young) modülü

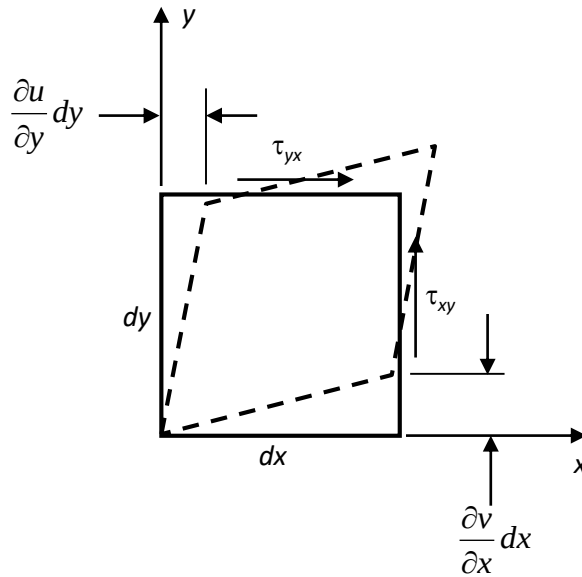
$$dU = \int_0^{\sigma_x} \sigma d(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) dy dz - \int_0^{\sigma_x} \sigma du dy dz = \int_0^{\sigma_x} \sigma d(\frac{\partial u}{\partial x}) dx dy dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_x = \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow dU = \int_0^{\sigma_x} \sigma \frac{d\sigma}{E} dx dy dz = \frac{\sigma_x^2}{2E} dx dy dz$$

$$U = \frac{dU}{dx dy dz} = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{E e_x^2}{2} = \frac{1}{2} \sigma_x e_x \dots \text{Strain Energy Density}$$

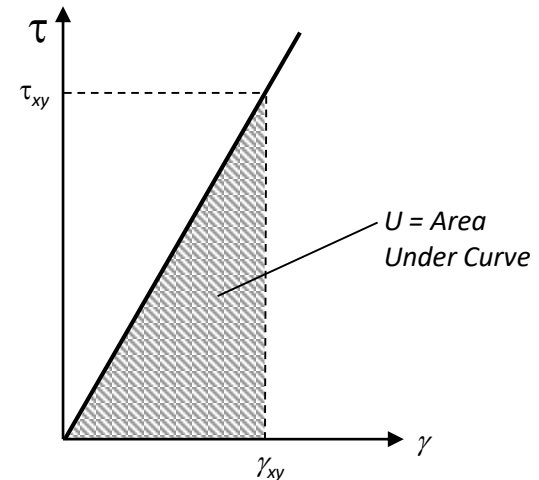


Shear Deformation



$$U = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2\mu} = \frac{\mu \gamma_{xy}^2}{2}$$

U	Kayma gerinme enerjisi yoğunluğu
τ_{xy}	Kayma gerilmesi
γ_{xy}	Kayma birim şekil değiştirmesi (kayma deformasyonu)
μ veya G	Kayma modülü (Shear Modulus)



1. Genel Gerinme Enerjisi Yoğunluğu

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

Burada:

Sembol	Anlamı
U	Birim hacimde depolanan gerinme enerjisi
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normal gerilmeler
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Normal birim şekil değiştirmeler
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Kayma gerilmeleri
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Kayma şekil değiştirmeleri

Bu denklem, normal ve kayma gerilmelerinin enerjiye katkılarının toplamıdır.

2. Toplam Gerinme Enerjisi

Birim hacimdeki enerji tüm hacim boyunca integre edilir:

$$U_T = \iiint_V U dV$$

Burada:

- U_T : Cismin toplam gerinme enerjisi (J)
- V : Cismin hacmi

General Deformation Case

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij}$$

$$\text{Total Strain Energy} = U_T = \iiint_V U dx dy dz$$

In Terms of Strain

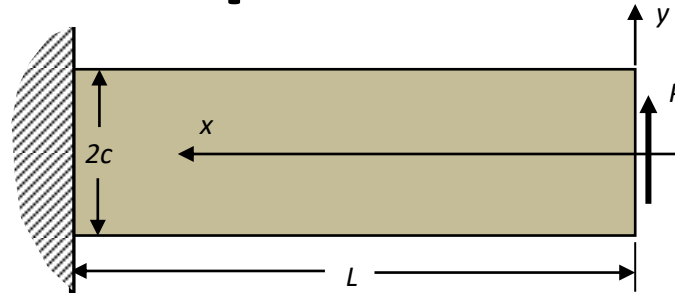
$$\begin{aligned} U(\mathbf{e}) &= \frac{1}{2} \lambda e_{jj} e_{kk} + \mu e_{ij} e_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \lambda (e_x + e_y + e_z)^2 + \mu (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{zx}^2) \end{aligned}$$

In Terms of Stress

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{jj} \sigma_{kk} \\ &= \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2) - \frac{\nu}{2E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \end{aligned}$$

Note Strain Energy Is *Positive Definite Quadratic Form* $\Rightarrow U \geq 0$

Example Problem



Stress Field from Exercise 8-2:

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3}xy, \tau_{xy} = -\frac{3P}{4c}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right), \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$U = \frac{1+\nu}{2E}(\sigma_x^2 + 2\tau_{xy}^2) - \frac{\nu}{2E}\sigma_x^2 = \frac{1}{2E}\sigma_x^2 + \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}^2$$

$$\begin{aligned} U_T &= \iiint U dV = \int_0^L \int_{-c}^c \int_0^L \left(\frac{1}{2E}\sigma_x^2 + \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}^2 \right) dx dy dz \\ &= \int_{-c}^c \int_0^L \left(\frac{1}{2E}\sigma_x^2 + \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}^2 \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2E} \int_{-c}^c \int_0^L \frac{9P^2}{4c^6} x^2 y^2 dx dy + \frac{1+\nu}{E} \int_{-c}^c \int_0^L \frac{9P^2}{16c^2} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right)^2 dx dy \\ &= \frac{P^2 L^2}{4Ec^3} + \frac{9P^2 L(1+\nu)}{Ec} \end{aligned}$$

Derivative Operations on Strain Energy

For the Uniaxial Deformation Case:

$$\frac{\partial U(\mathbf{e})}{\partial e_x} = \frac{\partial}{\partial e_x} \left(\frac{E e_x^2}{2} \right) = E e_x = \sigma_x \quad \frac{\partial U(\sigma)}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial}{\partial \sigma_x} \left(\frac{\sigma_x^2}{2E} \right) = \frac{\sigma_x}{E} = e_x$$

For the General Deformation Case:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U(\mathbf{e})}{\partial e_{ij}}, \quad e_{ij} = \frac{\partial U(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial e_{ij}} & \Rightarrow & C_{ijkl} = C_{klij} \\ \frac{\partial e_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial e_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} & \Rightarrow & \end{array}$$

Therefore $C_{ij} = C_{ji}$, and thus there are only 21 independent elastic constants for general anisotropic elastic materials

Denklem	Matematiksel İfade	Anlamı	Fiziksel Yorumu
1	$U(e) = \frac{Ee_x^2}{2}$	Tek eksenli gerinme enerjisi yoğunluğu	Malzemede depolanan elastik enerji
2	$\frac{\partial U(e)}{\partial e_x} = Ee_x = \sigma_x$	Enerjinin gerinmeye göre türevi	Gerilmeyi verir
3	$U(\sigma) = \frac{\sigma_x^2}{2E}$	Gerilme cinsinden enerji fonksiyonu	Enerjinin gerilme ile ifadesi
4	$\frac{\partial U(\sigma)}{\partial \sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} = e_x$	Enerjinin gerilmeye göre türevi	Gerinmeyi verir
5	$\sigma_{ij} = \frac{\partial U(e)}{\partial e_{ij}}$	Genel üç boyutlu durum	Her gerinme bileşenine karşılık gelen gerilmeyi verir
6	$e_{ij} = \frac{\partial U(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}}$	Genel üç boyutlu durum	Her gerilme bileşenine karşılık gelen gerinmeyi verir
7	$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial e_{ij}}$	Karşılıklılık ilişkisi	Elastik sabitlerin simetrik olduğunu gösterir
8	$C_{ijkl} = C_{klij}$	Elastisite tensörü simetrisi	Bağımsız elastik sabit sayısını azaltır

Decomposition of Strain Energy

Strain Energy May Be Decomposed into Two Parts Associated With *Volumetric Deformation* U_v , and *Distortional Deformation*, U_d

$$U = U_v + U_d$$

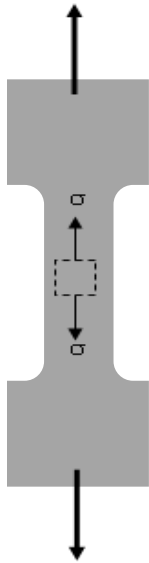
$$U_v = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{e}_{ij} = \frac{1}{6} \sigma_{jj} e_{kk} = \frac{1-2\nu}{6E} \sigma_{jj} \sigma_{kk} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

$$U_d = \frac{1}{12\mu} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]$$

Denklem	Açıklama	Fiziksel Anlamı
$U = U_v + U_d$	Toplam enerji	Enerji hacim değişimi ve şekil değişiminden oluşur.
$U_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$	Hacimsel gerinme enerjisi	Sadece hacim değişiminden kaynaklanan enerji
$U_d = \frac{1}{12\mu} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]$	Distorsiyon enerjisi	Şekil değişiminden kaynaklanan enerji

Bounds on Elastic Constants

Simple Tension

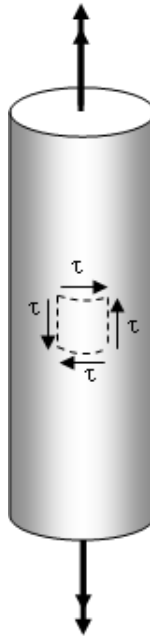


$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1+\nu}{2E} \sigma^2 - \frac{\nu}{2E} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$$E > 0$$

Pure Shear

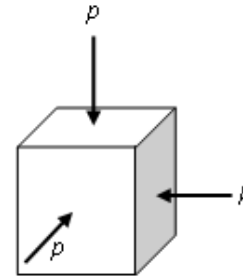


$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1+\nu}{2E} (2\tau^2) = \frac{\tau^2}{E} (1+\nu)$$

$$1+\nu > 0 \Rightarrow \nu > -1$$

Hydrostatic Compression



$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -p\delta_{ij}$$

$$U = \frac{1+\nu}{2E} 3p^2 - \frac{\nu}{2E} (-3p)^2 = \frac{3p^2}{2E} (1-2\nu)$$

$$1-2\nu > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -1 < \nu < \frac{1}{2} \quad k > 0, \mu > 0$$

Related Integral Theorems

Clapeyron's Theorem The strain energy of an elastic solid in static equilibrium is equal to one-half the work done by the external body forces F_i and surface tractions T_i^n

$$2 \int_V U dV = \int_S T_i^n u_i dS + \int_V F_i u_i dV$$

Betti/Rayleigh Reciprocal Theorem If an elastic body is subject to two body and surface force systems, then the work done by the first system of forces $\{\mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{F}^{(1)}\}$ acting through the displacements $\mathbf{u}^{(2)}$ of the second system is equal to the work done by the second system of forces $\{\mathbf{T}^{(2)}, \mathbf{F}^{(2)}\}$ acting through the displacements $\mathbf{u}^{(1)}$ of the first system

$$\int_S T_i^{(1)} u_i^{(2)} dS + \int_V F_i^{(1)} u_i^{(2)} dV = \int_S T_i^{(2)} u_i^{(1)} dS + \int_V F_i^{(2)} u_i^{(1)} dV$$

Integral Formulation of Elasticity - Somigliana's Identity Represents an integral statement of the elasticity problem. Result is used in development of *boundary integral equation methods* (BIE) in elasticity, and leads to computational technique of *boundary element methods* (BEM)

$$c u_j(\xi) = \int_S [T_i(\mathbf{x}) G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) - u_i T_{ikj}(\mathbf{x}, \xi) n_k] dS + \int_V F_i G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) dV$$

G_{ij} is the *displacement Green's function* to the elasticity equations and

$$T_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) = \lambda G_{lk,l} \delta_{ij} + \mu (G_{ik,j} + G_{jk,i}) \quad c = \begin{cases} 1, & \xi \text{ in } V \\ \frac{1}{2}, & \xi \text{ on } S \\ 0, & \xi \text{ outside } V \end{cases}$$

Related Integral Theorems

$$c = \begin{cases} 1, & \xi \text{ in } V \\ \frac{1}{2}, & \xi \text{ on } S \\ 0, & \xi \text{ outside } V \end{cases}$$

U	Birim hacimdeki gerinme enerjisi
V	Cismin hacmi
S	Cismin yüzeyi
T_i^n	Yüzey kuvveti (traction)
F_i	Hacim kuvveti (yerçekimi vb.)
u_i	Yer değiştirme

Nokta hacmin içinde	1
Nokta sınır üzerinde	1/2
Nokta dışarıda	0

Mühendislikte Önemi

Teorem	Kullanım Alanı
Clapeyron	Enerji hesapları
Betti-Rayleigh	Karşılıklılık ilişkileri
Somigliana	Sınır Elemanlar Yöntemi (BEM)
Green Fonksiyonu	Temel çözüm fonksiyonları

Kısa Ezber

Teorem	Ana Fikir
Clapeyron	Dış iş = 2 × Gerinme Enerjisi
Betti-Rayleigh	$W_{12} = W_{21}$
Somigliana	İç noktadaki deplasman sınır değerlerinden bulunur
Green Fonksiyonu	Birim yükün oluşturduğu deplasman cevabı